ВИДАВНИЦТВО
РАНОК

Інтернет-
підтримка

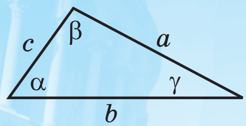
Геометрія 11

ПРОФІЛЬНИЙ РІВЕНЬ

ОСНОВНІ ФОРМУЛИ ПЛАНІМЕТРІЇ

ТРИКУТНИКИ

Довільний трикутник

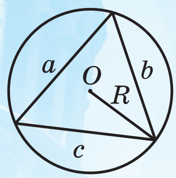


Теорема синусів

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$$

Теорема косинусів

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$$



Площа трикутника

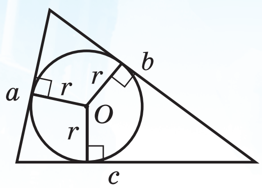
$S=\frac{1}{2}ah_a$, **де** h_a **– висота до сторони** a

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$$

Формула Герона

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

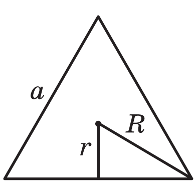
де $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ **– півпериметр**



Формули радіусів

$$R=\frac{abc}{4S} \qquad r=\frac{2S}{a+b+c}=\frac{S}{p}$$

Рівносторонній трикутник



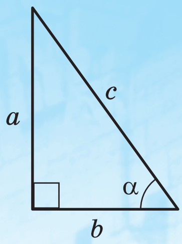
Формула висоти $h=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Площа $S=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Формули радіусів

$$R=\frac{a}{\sqrt{3}} \qquad r=\frac{a}{2\sqrt{3}}$$

Прямокутний трикутник

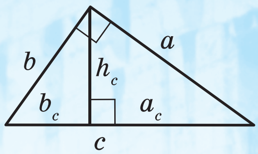


Теорема Піфагора $a^2 + b^2 = c^2$

Тригонометричні функції

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

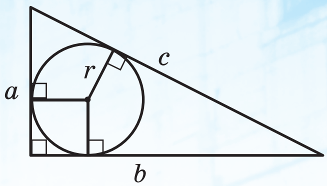
$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$$



Метричні співвідношення

$$h_c = \frac{ab}{c} = \sqrt{a_c \cdot b_c}$$

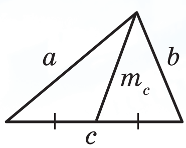
$$a^2 = a_c \cdot c \qquad b^2 = b_c \cdot c$$



Площа $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$

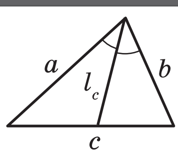
Формули радіусів $R = \frac{c}{2}$, $r = \frac{a+b-c}{2}$

Медіана

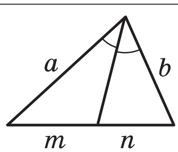


$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$$

Бісектриса



$$l_c^2 = ab - mn$$



$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$$

Геометрія

ПРОФІЛЬНИЙ РІВЕНЬ

підручник для 11 класу
закладів загальної середньої освіти

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Харків
Видавництво «Ранок»
2020

УДК 37.016:514(075.3)
Г36

Авторський колектив:
А. П. Єршова, В. В. Голобородько, О. Ф. Крижановський, С. В. Єршов

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України від 12.04.2019 № 472)

Ілюстрації художника *Володимира Хорошенка*

Г36 **Геометрія** (профільний рівень) : підруч. для 11 кл. закл. загал. серед. освіти / [А. П. Єршова, В. В. Голобородько, О. Ф. Крижановський, С. В. Єршов]. — Харків : Вид-во «Ранок», 2020. — 240 с. : іл.

ISBN 978-617-09-5234-9

УДК 37.016:514(075.3)

Інтернет-підтримка
Електронні матеріали
до підручника розміщено на сайті
interactive.ranok.com.ua

ISBN 978-617-09-5234-9

Дорогі одинадцятикласники і одинадцятикласниці!

Чи бачили ви коли-небудь, як під час будівництва окремі блоки й конструкції, доповнюючи одна одну, складаються в цілісну споруду? Саме такий процес перетворення окремих частин на єдине ціле ви спостерігатимете, вивчаючи геометрію в 11 класі.

У курсі стереометрії 10 класу ви познайомилися з основними фігурами в просторі — точками, прямими й площинами, дослідили їхні властивості й особливості взаємного розміщення. Усі ці найпростіші фігури разом із добре відомими вам плоскими фігурами є елементами геометричних тіл, які розглядатимуться в курсі геометрії 11 класу.

Як відомо, геометрія не є суто абстрактною наукою — фігури й форми, які вона вивчає, можна знайти в реальному житті, навіть не залишаючи шкільного класу. Радимо вам звернути особливу увагу на застосування понять і фактів, викладених у цьому підручнику, у різних галузях людської діяльності. Не забувайте, що будь-які знання мають справжню цінність лише тоді, коли вони ґрунтуються на досвіді й застосовуються на практиці.

Бажаємо, щоб дорога до знань була для вас легкою і радісною, а всі перешкоди, які можуть на ній зустрітися, ви долали завдяки наполегливості і прагненню до перемог у науці. У добру путь!

Як користуватися підручником

Підручник має три розділи, кожний із яких складається з параграфів, а параграфи — з пунктів. У тексті міститься як теоретичний матеріал, так і приклади розв'язування задач. Найважливіші поняття і факти виділені **напівжирним шрифтом**.

Вправи і задачі, які подано в підручнику, поділяються на декілька груп. Усні вправи (рубрика «***Обговорюємо теорію***») допоможуть вам зрозуміти, наскільки успішно ви засвоїли теоретичний матеріал. Ці вправи не обов'язково виконувати подумки — для їх розв'язування ви можете використати рисунки, провести необхідні міркування в чернетці. Після усних можна переходити до практичних вправ (рубрика «***Моделюємо***»). Далі йдуть письмові задачі (рубрика «***Розв'язуємо задачі***»). Спочатку перевірте свої знання, виконуючи завдання ***рівня А***. Деякі з усних і практичних вправ і задач рівня А мають позначення «$^{\bullet}$»

як такі, що відповідають *початковому* рівню, решта завдань рівня А відповідають *середньому* рівню. Більш складними є задачі ***рівня Б*** (*достатній* рівень). І нарешті, якщо ви добре опанували матеріал і бажаєте виявити свої творчі здібності, на вас чекають задачі ***рівня В*** (*високий* рівень). Позначення і біля номерів вправ означають, що ці вправи на розсуд учителя можуть бути використані для роботи в парах і групах відповідно. Після кожного параграфа в рубриці «***Повторення***» зазначено, які саме поняття й факти* слід пригадати для успішного вивчення наступного матеріалу, та наведено задачі, які підготують вас до сприйняття наступної теми. Для самостійної роботи вдома призначені задачі, номери яких мають позначення . Розв'язувати всі задачі всіх груп не обов'язково.

Оскільки вивчення геометрії у просторі має сприяти всебічному розвитку та вихованню особистості, до підручника включено як класичні задачі з геометрії (зокрема, задачі практичного змісту), так і завдання, призначені для формування й розвитку, окрім математичної, інших ключових компетентностей. Такі завдання мають позначення . Їхня тематика присвячена оволодінню державною й іноземними мовами, опануванню природничих наук, використанню інформаційно-комунікативних технологій, усвідомленню необхідності розв'язування актуальних екологічних і соціальних проблем тощо.

У підручнику розміщено ***тестові завдання для самоперевірки***, завдяки яким ви зможете краще підготуватися до тематичного оцінювання. Крім того, ви маєте змогу самостійно перевірити рівень вашої підготовки, пройшовши онлайн-тестування на сайті interactive.ranok.com.ua. Про можливість скористатися матеріалами сайта вам нагадуватиме позначення . ***Додаткові задачі*** до розділів допоможуть вам узагальнити вивчене, а ***задачі підвищеної складності*** відкриють нові грані геометрії, красу нестандартного мислення.

Підсумкові огляди наприкінці кожного розділу — своєрідний геометричний компас, за допомогою якого ви зможете орієнтуватися у вивченому матеріалі. Рубрика ***«Історична довідка»*** познайомить з цікавими фактами з розвитку геометрії.

* Наведено посилання на навчальний матеріал підручників з геометрії для 7–10 класів закладів загальної середньої освіти авторів А. П. Єршової, В. В. Голобородька, О. Ф. Крижановського, С. В. Єршова.

Розділ I
МНОГОГРАННИКИ

Геометрія це справжня природнича наука, тільки простіша, а отже, і досконаліша за будь-яку іншу.

Огюст Конт,
французький філософ

Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича

Серед твердих тіл природного і штучного походження особливо важливу роль відіграють многогранники. Подібно до многокутників на площині, вони наочно демонструють, як поєднання відомих властивостей найпростіших геометричних фігур породжує нові, досі невідомі факти. Недарма, кажучи про всебічно обдаровану людину, ми часто відзначаємо многогранність її таланту.

Для успішного вивчення многогранників необхідно поновити в пам'яті чимало властивостей многокутників, а також основні теореми про розміщення прямих і площин у просторі. Саме на цьому теоретичному підґрунті базуються основні теореми цього розділу.

Властивості многогранників знаходять широке практичне застосування в мистецтві й будівництві, кристалографії й комп'ютерній графіці. Видатний архітектор XX століття Ле Корбюзьє справедливо зазначав, що шедеври архітектури давнини з'явилися лише завдяки законам геометрії. І значну частину цих неоціненно корисних для практичної діяльності людини законів приховують у собі саме многогранники.

§1 Многогранні кути. Многогранник та його елементи

1.1. Двогранний кут

Поняття двогранного кута розглядалося нами в курсі геометрії 10 класу. Пригадаємо, як вводилося це поняття.

У планіметрії ***кутом*** називається фігура, що складається з двох променів зі спільним початком. За аналогією в просторі можна розглянути дві півплощини зі спільною граничною прямою. Якщо ми перегнемо по прямій аркуш паперу, то отримаємо модель такої просторової фігури.

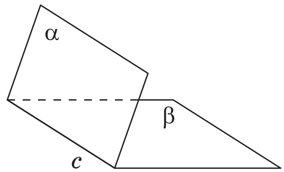


Рис. 1. Двогранний кут

Означення

Двогранним кутом називається фігура, яка складається з двох півплощин (*граней двогранного кута*) зі спільною граничною прямою (*ребром двогранного кута*).

Рис. 2. Моделі двогранних кутів

На рис. 1 зображено двогранний кут з гранями α і β та ребром *c*.

Наочне уявлення про двогранні кути дають напіврозкрита книжка або папка, двосхилий дах будинку, дві сусідні стіни кімнати тощо (рис. 2).

Вимірювання двогранних кутів зводиться до вимірювання кутів між променями, здійснити яке можна завдяки додатковим побудовам.

Через точку *O* на ребрі заданого двогранного кута (рис. 3) проведемо площину, перпендикулярну до ребра кута. Вона перетинає грані кута по променях *OA* і *OB*, перпендикулярних до ребра заданого кута. Кут *AOB*, утворений цими променями, називають ***лінійним кутом заданого двогранного кута.*** Часто під час побудови

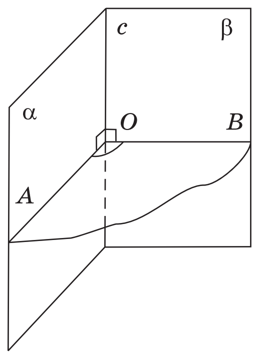


Рис. 3. Лінійний кут двогранного кута

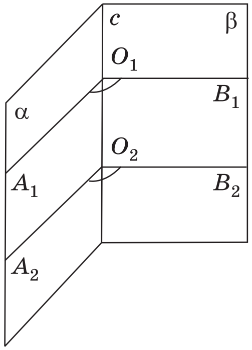


Рис. 4. До обґрунтування рівності лінійних кутів двогранного кута

лінійного кута двогранного кута площину, перпендикулярну до ребра, не будують, обмежуючись проведенням у гранях заданого кута променів зі спільним початком, перпендикулярних до ребра кута.

Очевидно, що двогранний кут має безліч лінійних кутів. Покажемо, що ***всі лінійні кути двогранного кута рівні***.

Справді, нехай кути $A_1O_1B_1$ і $A_2O_2B_2$ — лінійні кути двогранного кута (рис. 4). Паралельне перенесення, яке переводить точку O_1 в точку O_2, переводить кут $A_1O_1B_1$ у кут $A_2O_2B_2$. Оскільки внаслідок паралельного перенесення величини кутів зберігаються, то $\angle A_1O_1B_1 = \angle A_2O_2B_2$. Це дозволяє сформулювати таке означення.

Означення

Градусною мірою двогранного кута називається градусна міра його лінійного кута.

За доведеним градусна міра двогранного кута не залежить від вибору лінійного кута.

Згідно з означенням кута в планіметрії, градусна міра двогранного кута лежить у межах від 0° до 180° (випадки, коли грані двогранного кута збігаються або належать одній площині, зазвичай не розглядаються). Як і серед кутів на площині, серед двогранних кутів розрізняють ***гострі*** (менші від 90°), ***прямі*** (ті, що дорівнюють 90°) і ***тупі*** (більші за 90° і менші від 180°).

Отже, ***для обґрунтування градусної міри двогранного кута необхідно побудувати його лінійний кут, тобто вказати на гранях даного двогранного кута два промені зі спільним початком, перпендикулярні до ребра кута***.

Один зі способів побудови таких променів описаний у розв'язанні такої задачі.

Задача

На одній із граней двогранного кута, який дорівнює 45°, позначено точку, що віддалена на 8 см від ребра кута. Знайдіть відстань від цієї точки до другої грані кута.

Розв'язання

Нехай точка A належить грані α заданого двогранного кута (рис. 5). Проведемо $AB \perp \beta$; AB — відстань від точки A до грані β. Проведемо $AC \perp c$; AC — відстань від точки A до ребра c; за умовою $AC = 8$ см. Відрізок BC — проекція похилої AC на площину β. За теоремою про три перпендикуляри $BC \perp c$. Отже, кут ACB — лінійний кут двогранного кута; за умовою $\angle ACB = 45°$. З трикутника ABC ($\angle B = 90°$)

$\sin C = \frac{AB}{AC}$, $AB = AC \cdot \sin C = 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$ (см).

Відповідь: $4\sqrt{2}$ см.

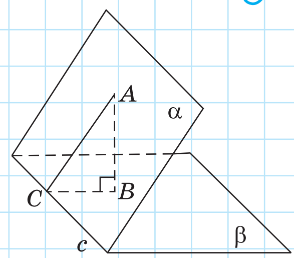


Рис. 5

Кажуть, що точка M лежить ***усередині двогранного кута***, якщо існує лінійний кут даного двогранного кута, у внутрішній області якого лежить точка M. Зокрема, на рис. 5 у внутрішній області заданого двогранного кута лежить будь-яка внутрішня точка відрізка AB. Множина всіх точок, які лежать усередині двогранного кута, є ***внутрішньою областю двогранного кута***.

1.2. Тригранний і многогранний кути

Розглянемо промені a, b і c зі спільним початком P, які не лежать в одній площині (рис. 6). Кожна пара цих променів визначає плоский кут із вершиною P, а всі вони разом — просторову фігуру, яку називають ***тригранним кутом***.

Означення

Тригранним кутом називається фігура, яка складається з трьох плоских кутів зі спільною вершиною і попарно спільними сторонами, що не лежать в одній площині.

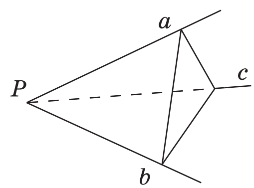


Рис. 6. Тригранний кут

На рис. 6 тригранний кут з вершиною P утворений плоскими кутами (ab), (bc) і (ac). Ці плоскі кути називають ***гранями тригранного***

кута, а їхні сторони a, b і c — ***ребрами тригранного кута***. Кожні дві грані тригранного кута визначають півплощини, у яких вони лежать, причому ці півплощини обмежені спільною прямою — ребром тригранного кута. Двогранні кути, які утворені такими півплощинами, називають ***двогранними кутами тригранного кута***.

Опорна задача
(нерівність трикутника для тригранного кута)

Будь-який плоский кут тригранного кута менший від суми двох інших плоских кутів. Доведіть.

Розв'язання

Нехай PA, PB і PC — ребра тригранного кута з вершиною P, а кут APC — найбільший із плоских кутів заданого кута (рис. 7). У грані APC проведемо промінь PK так, щоб $\angle APK = \angle APB$, і відкладемо на цьому промені відрізок PD, який дорівнює PB. Тоді $\triangle PAD = \triangle PAB$ за двома сторонами й кутом між ними, звідки $AB = AD$.

Нехай промені AD і PC перетинаються в точці E. Тоді з трикутника ABE за нерівністю трикутника $AE < AB + BE$, або $AD + DE < AB + BE$.

Оскільки $AB = AD$, маємо $DE < BE$. У трикутниках DEP і BEP сторона EP спільна, $PB = PD$, $DE < BE$.

З теореми косинусів для цих трикутників випливає, що $\cos\angle BPE < \cos\angle DPE$, звідки $\angle BPE > \angle DPE$. Тоді $\angle BPE + \angle APD > \angle DPE + \angle APD$. Але $\angle APD = \angle APB$, $\angle DPE + \angle APD = \angle APE$, тому $\angle BPE + \angle APB > \angle APE$, тобто $\angle BPC + \angle APB > \angle APC$, що й треба було довести.

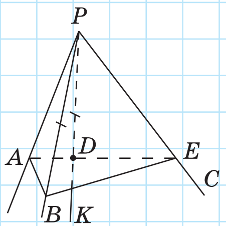


Рис. 7. До доведення нерівності трикутника для тригранного кута

Аналогічно до тригранного кута означають чотиригранний, п'ятигранний і взагалі n-гранний кут при $n \geqslant 3$. У шкільному курсі ми розглядатимемо лише *опуклі многогранні кути* — кути, які лежать по один бік від площини будь-якої своєї грані або в цій самій площині. Наприклад, на рис. 8 зображено опуклий п'ятигранний кут з вершиною P.

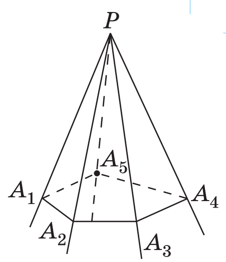


Рис. 8. Опуклий п'ятигранний кут

Опорна задача
(про суму плоских кутів опуклого многогранного кута)

Сума плоских кутів опуклого многогранного кута менша від 360°. Доведіть.

Розв'язання

Нехай деяка площина перетинає ребра многогранного кута з вершиною P у точках $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (рис. 9). Розглянемо n тригранних кутів з вершинами $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Для кожного з цих кутів унаслідок нерівності трикутника для тригранного кута маємо:

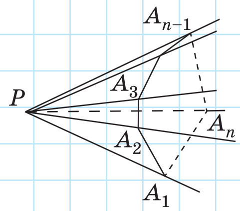


Рис. 9. Тригранний кут

$$\angle A_nA_1A_2 < \angle A_nA_1P + \angle A_2A_1P,$$
$$\angle A_1A_2A_3 < \angle A_1A_2P + \angle A_3A_2P,$$
$$\ldots$$
$$\angle A_{n-1}A_nA_1 < \angle A_{n-1}A_nP + \angle A_1A_nP.$$

Зауважимо, що сума лівих частин цих нерівностей є сумою кутів опуклого n-кутника $A_1A_2\ldots A_n$, тобто дорівнює $180°(n-2)$. Сума правих частин є сумою кутів при основах трикутників A_1PA_2, A_2PA_3, …, A_nPA_1, тобто дорівнює $180° \cdot n - S$, де S — сума кутів цих трикутників при вершині P, яка і є сумою плоских кутів заданого многогранного кута. Отже, додаючи отримані нерівності, маємо: $180°(n-2) < 180°n - S$, звідки $S < 360°$.

1.3. Многогранник

Серед просторових фігур, які вивчаються в курсі стереометрії, особливе місце посідають ***геометричні тіла***, або просто ***тіла***. Наочно геометричне тіло можна уявити як скінченну частину простору, зайняту фізичним тілом і обмежену поверхнею*.

Серед предметів, що оточують нас у повсякденному житті, є чимало таких, поверхня яких складається з плоских многокутників: сірниковий коробок, шпаківня тощо (рис. 10). Такі предмети дають уявлення про многогранники.

Означення

Многогранником називається тіло, поверхня якого складається зі скінченної кількості плоских многокутників.

* Означення геометричного тіла буде дано в п. 9.3.

Рис. 10. Моделі многогранників

Плоскі многокутники, з яких складається поверхня многогранника, називаються ***гранями многогранника***. Сторони і вершини цих многокутників називаються відповідно ***ребрами*** і ***вершинами многогранника***. Кожне ребро многогранника належить рівно двом його граням. При цьому жодні дві ***сусідні грані*** (тобто грані, які мають спільне ребро) не лежать в одній площині. Наприклад, многогранник на рис. 11, *а* має вісім граней, кожна з яких є трикутником, 12 ребер і 6 вершин. Грані многогранника, які лежать у паралельних площинах, називають ***паралельними гранями***.

Так само як і многокутники, многогранники поділяються на *опуклі* і *неопуклі*.

Означення

Опуклим многогранником називається многогранник, усі точки якого лежать по один бік від площини кожної його грані або в цій самій площині.

В іншому випадку многогранник називається ***неопуклим***.

Зокрема, многогранник на рис. 11, *а* є опуклим, а многогранник на рис. 11, *б* — неопуклим (поясніть чому). Прикладами

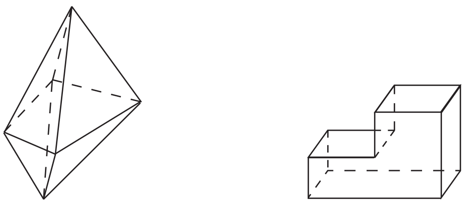


Рис. 11. Опуклий і неопуклий многогранники

опуклих многогранників є вже відомі вам призма, паралелепіпед, тетраедр. Далі ми вивчатимемо властивості цих многогранників докладніше.

Двогранний кут, утворений півплощинами, у яких лежать сусідні грані даного опуклого многогранника, називається ***двогранним кутом опуклого многогранника***. Зауважимо, що даний многогранник лежить у внутрішній області цього двогранного кута.

Якщо поверхню моделі многогранника, виготовленої з цупкого паперу, розрізати по декількох ребрах і розпластати на площині, отримаємо многокутник, який називають ***розгорткою многогранника*** (або розгорткою поверхні многогранника).

На рис. 12 подано розгортки деяких многогранників: *а* — правильного тетраедра, *б* — чотирикутної піраміди, *в*, *г* — куба.

Площею повної поверхні (або просто *площею поверхні*) многогранника називається сума площ усіх його граней. Очевидно, що площа поверхні многогранника дорівнює площі його розгортки.

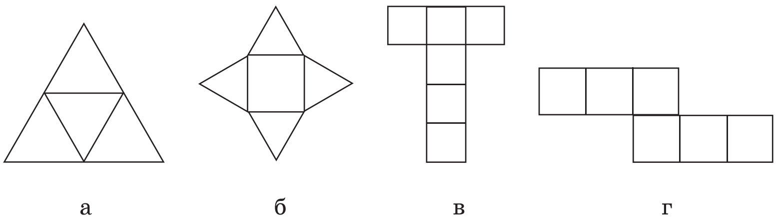


Рис. 12. Розгортки многогранників

Запитання і задачі

Обговорюємо теорію

1.° Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 13). Назвіть ребро й один із лінійних кутів двогранного кута з гранями:

а) B_1BC і ABC; в) B_1AC і ABC;

б) A_1AO і D_1DO; г) A_1BD і BDC.

Які з цих кутів є гострими; прямими; тупими?

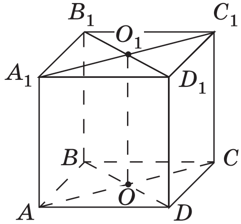


Рис. 13

2. Один із двогранних кутів, що утворилися при перетині двох площин, дорівнює φ. Яку градусну міру може мати кут між заданими площинами?

3. Перекладіть англійською (або іншою іноземною мовою) терміни «двогранний кут», «тригранний кут», «многокутник».

4. Чи існує тригранний кут, плоскі кути якого дорівнюють:
а) $40°$, $50°$ і $100°$;
б) $20°$, $60°$ і $80°$;
в) $150°$, $160°$ і $170°$?

5. Чи існує опуклий чотиригранний кут, плоскі кути якого дорівнюють:
а) $90°$;
б) $60°$, $80°$, $100°$ і $130°$?

6. Скільки тригранних кутів має тетраедр; трикутна призма; куб?

7. Многогранник має m вершин і n ребер. Скільки в нього двогранних кутів? Чи правильно, що даний многогранник має m тригранних кутів? Висловте припущення.

Моделюємо*

8•. Змоделюйте многогранник, який:
а) не є тетраедром, але всі його грані — трикутники;
б) не є кубом, але чотири його грані — квадрати.

9•. Виготовте з цупкого паперу модель правильного тетраедра. Розріжте її по ребрах так, щоб отримати розгортку, відмінну від розгортки на рис. 12, *а*. Чи дорівнюють одна одній площі двох різних розгорток заданого тетраедра? Відповідь обґрунтуйте.

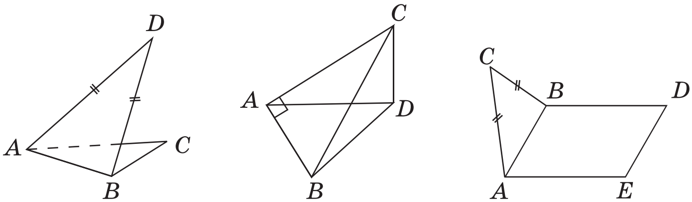
10. Інсталюйте на комп'ютер, ноутбук чи смартфон програму DG, Geogebra або інший графічний редактор із підтримкою 3D-моделювання. Засобами встановленої програми змоделюйте чотиригранний кут. Пофарбуйте його грані в різні кольори.

Розв'язуємо задачі

Рівень А

11•. За даними рис. 14, *а–в* побудуйте й обґрунтуйте лінійний кут двогранного кута з ребром AB.

* Тут і далі в практичних завданнях на склеювання розгорток многогранників необхідно враховувати припуски матеріалу на склеювання.



$\triangle ABC$ правильний — а

$CD \perp (ABD)$ — б

$ABDE$ — квадрат — в

Рис. 14

12• На одній із граней двогранного кута позначено точку.

а) Знайдіть величину кута, якщо він гострий, а дана точка віддалена від ребра кута на 12 см і від площини другої грані на $6\sqrt{3}$ см.

б) Знайдіть відстань від даної точки до площини другої грані, якщо двогранний кут дорівнює $30°$, а відстань від даної точки до ребра кута становить 14 см.

13• Рівносторонній трикутник ABC зі стороною $2\sqrt{6}$ см лежить в одній із граней двогранного кута з ребром AC. Знайдіть відстань від точки B до площини другої грані, якщо двогранний кут дорівнює $45°$.

14. На різних гранях двогранного кута позначено точки A і B, віддалені від граней, яким вони не належать, на 14 см і 21 см відповідно. У скільки разів відстань від точки B до ребра кута більша, ніж відстань від точки A до ребра кута?

15. На одній із граней гострого двогранного кута позначено дві точки, перша з яких віддалена від ребра кута на 7 см, а друга — на 21 см. Знайдіть відстань від другої точки до площини іншої грані кута, якщо перша точка віддалена від цієї грані на 4 см.

16. Усі плоскі кути тригранного кута прямі. Доведіть, що всі його двогранні кути також прямі.

17. Усі плоскі кути опуклого многогранного кута прямі. Скільки граней може мати такий кут?

18. Два плоскі кути тригранного кута прямі, а третій дорівнює 60°. На грані, яка містить найменший плоский кут, позначено точку M, віддалену від кожного з ребер цієї грані на 4 см. Знайдіть відстань від точки M до третього ребра кута.

19. Усі плоскі кути тригранного кута прямі. На ребрах кута позначено точки A, B і C, віддалені від його вершини на $3\sqrt{2}$ см. Знайдіть площу трикутника ABC.

20. Нарисуйте розгортку:

а) правильного тетраедра з ребром 4 см;

б) прямокутного паралелепіпеда, ребра якого дорівнюють 2 см, 3 см і 5 см.

Знайдіть площу повної поверхні заданих фігур.

Рівень Б

21. Площина γ перетинає грані двогранного кута, що дорівнює 45°, по паралельних прямих, віддалених від ребра кута на $3\sqrt{2}$ см і 7 см. Знайдіть відстань між цими прямими.

22. У гранях двогранного кута проведено дві прямі, паралельні ребру кута. Знайдіть величину двогранного кута, якщо дані прямі віддалені від ребра на 7 см і 8 см, а відстань між ними дорівнює 13 см.

23. Ортогональна проекція прямої l на одну з граней двогранного кута перпендикулярна до ребра кута. Доведіть, що проекція прямої l на другу грань також перпендикулярна до ребра кута.

24. З точок A і C, які лежать на різних гранях двогранного кута, проведено до його ребра перпендикуляри $AB=7$ см і $CD=15$ см. Знайдіть величину двогранного кута, якщо $BD=84$ см, $AC=85$ см.

25. З точок A і C, які лежать на різних гранях двогранного кута, що дорівнює 45°, проведено до його ребра перпендикуляри $AB=4\sqrt{2}$ см і $CD=1$ см. Знайдіть довжину відрізка AC, якщо $BD=12$ см.

26 (опорна). Доведіть, що:

а) ***кожний плоский кут тригранного кута більший за різницю двох інших плоских кутів;***

б) ***кожний плоский кут опуклого многогранного кута менший від суми решти його плоских кутів.***

27. Визначте, у яких межах може змінюватися величина плоского кута тригранного кута, якщо два інші його плоскі кути дорівнюють:
а) $60°$ і $80°$;   б) $90°$ і $100°$.

28. Усі плоскі кути тригранного кута прямі. Знайдіть відстань від його вершини до точки, яка лежить усередини кута* й віддалена:
а) від його граней на 2 см, 3 см і 6 см;
б) від його ребер на 20 см, 31 см і 33 см.

29. Кожний із плоских кутів тригранного кута дорівнює $60°$. Знайдіть його двогранні кути.

30. Плоскі кути тригранного кута дорівнюють $60°$, $60°$ і $90°$. Доведіть, що площина, яка відтинає на ребрах кута рівні відрізки, перпендикулярна до площини найбільшого плоского кута.

31. Розгорткою трикутної піраміди є рівнобедрений трикутник з основою 12 см і бічною стороною 10 см. Знайдіть довжини всіх ребер і площу повної поверхні піраміди.

Рівень В

32. Користуючись мережею Інтернет, знайдіть означення та основні властивості перетворення подібності у просторі. Порівняйте їх із відповідними властивостями на площині. Доведіть, що відношення площ поверхонь подібних многогранників дорівнює квадрату коефіцієнта подібності.

33. В одній із граней двогранного кута проведено пряму, яка утворює з його другою гранню кут $45°$, а з ребром — кут $60°$. Знайдіть величину двогранного кута.

34. Двогранний кут дорівнює $60°$. В одній із граней кута проведено пряму, яка утворює з ребром кут $45°$. Знайдіть кут нахилу даної прямої до другої грані двогранного кута.

35. У тригранному куті з ребрами OA, OB і OC двогранний кут при ребрі OC прямий, двогранний кут при ребрі OB дорівнює α $(\alpha < 90°)$, а плоский кут BOC дорівнює β $(\beta < 90°)$. Знайдіть плоскі кути AOB і AOC.

* Кажуть, що точка лежить усередині опуклого многогранного кута, якщо ця точка і решта граней кута лежать по один бік відносно площини будь-якої грані цього кута.

36. У тригранному куті два плоскі кути дорівнюють $45°$, а двогранний кут між ними прямий. Знайдіть величину третього плоского кута.

37. Плоскі кути тригранного кута дорівнюють $60°$, $60°$ і $90°$. Знайдіть величини двогранних кутів, прилеглих до найбільшого плоского кута.

38. Доведіть, що не існує многогранника, який має рівно сім ребер.

Повторення перед вивченням § 2

Теоретичний матеріал

- правильний многокутник; 9 клас, § 18
- властивості й ознаки паралелограма; 8 клас, § 2, 3
- перпендикулярність площин. 10 клас, § 12

Задачі

39. Паралелограми $ABCD$ і ABC_1D_1 не лежать в одній площині. Доведіть, що:

а) $CC_1 \parallel DD_1$;

б) площини BCC_1 і ADD_1 паралельні.

40. Паралелограми $ABCD$ і ABC_1D_1 не лежать в одній площині. Задайте вектор паралельного перенесення, яке переводить трикутник BCC_1 у трикутник ADD_1.

§2 Призма. Паралелепіпед

2.1. Призма та її елементи

Розглянемо два плоскі многокутники, які не лежать в одній площині й суміщаються паралельним перенесенням (рис. 15). Таке перенесення встановлює відповідність між точками цих многокутників. Усі відрізки, що сполучають відповідні точки даних плоских многокутників, утворюють многогранник.

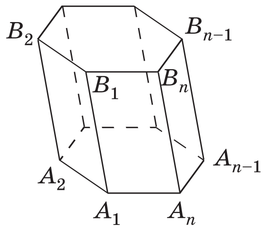


Рис. 15. Призма

Означення

Призмою називається многогранник, який складається з двох плоских многокутників, що лежать у різних площинах і суміщаються паралельним перенесенням, та всіх відрізків, які сполучають відповідні точки цих многокутників.

Многокутники називають ***основами призми***, а відрізки, що сполучають відповідні вершини основ, — ***бічними ребрами призми***. Усі грані призми, які не є основами, називають ***бічними гранями призми***. Призма на рис. 15 має основи $A_1A_2...A_n$ і $B_1B_2...B_n$, бічні грані $A_1B_1B_2A_2$, $A_2B_2B_3A_3$, ..., $A_nB_nB_1A_1$ і бічні ребра A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n. Основами цієї призми є плоскі n-кутники, тому її називають ***n-кутною призмою*** і позначають $A_1A_2...A_nB_1B_2...B_n$. Зауважимо, що в шкільному курсі ми розглядатимемо лише призми, основами яких є опуклі многокутники; такі призми є опуклими многогранниками.

Призма — від грецького «призма» — розпиляна.

Розглянемо деякі **властивості призми**.

Оскільки паралельне перенесення є переміщенням і переводить площину в паралельну площину (або в себе), то ***основи призми паралельні й рівні***.

Окрім того, з означення паралельного перенесення випливає, що ***бічні ребра призми паралельні й рівні***, а ***бічні грані призми — паралелограми***.

Зображення призми будують відповідно до правил паралельного проектування. Побудову зазвичай розпочинають з однієї з основ. Потім з вершин основи проводять паралельні й рівні відрізки — бічні ребра призми. Послідовно сполучивши кінці бічних ребер, отримують другу основу призми. Невидимі ребра зображають штриховими лініями.

Означення

Висотою призми називається перпендикуляр, проведений із будь-якої точки однієї основи до площини іншої основи.

Означення

Діагоналлю призми називається відрізок, який сполучає дві вершини, що не належать одній грані.

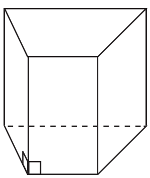
Означення

Прямою призмою називається призма, бічні ребра якої перпендикулярні до площин основ.

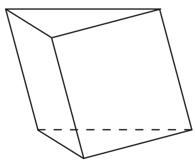
Призма, яка не є прямою, називається ***похилою призмою***.

На рис. 16, *а* зображено пряму чотирикутну призму, а на рис. 16, *б* — похилу трикутну призму.

Очевидно, що ***бічні ребра прямої призми є її висотами***, а ***бічні грані прямої призми є прямокутниками***.



а



б

Рис. 16. Пряма і похила призми

Означення

Правильною призмою називається пряма призма, основами якої є правильні многокутники.

На рис. 17 зображено правильну шестикутну призму. Усі бічні грані правильної призми — рівні прямокутники.

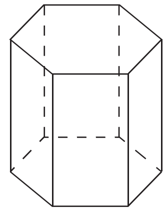


Рис. 17. Правильна призма

2.2. Бічна і повна поверхні призми. Розв'язування стереометричних задач на обчислення

Площею повної поверхні призми називається сума площ усіх її граней, а ***площею бічної поверхні*** — сума площ її бічних граней.

Площа повної поверхні зазвичай позначається $S_{\text{повн}}$, а площа бічної поверхні — $S_{\text{бічн}}$. Очевидно, що ***для будь-якої призми*** $\boldsymbol{S_{\text{повн}} = S_{\text{бічн}} + 2S_{\text{осн}}}$***, де*** $\boldsymbol{S_{\text{осн}}}$ ***— площа основи призми.***

Теорема (формула площі бічної поверхні прямої призми)

Площа бічної поверхні прямої призми дорівнює добутку периметра її основи на висоту:

$$\boldsymbol{S_{\text{бічн}} = P_{\text{осн}} \cdot H}.$$

Доведення

□ Бічні грані прямої призми є прямокутниками, одна зі сторін яких дорівнює відповідній стороні основи призми, а сусідня сторона — висоті призми. Площа бічної поверхні призми дорівнює сумі площ цих прямокутників. Отже, якщо $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — сторони основи призми, то

$$S_{\text{бічн}} = a_1H + a_2H + \ldots + a_nH = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)H = P_{\text{осн}} \cdot H.$$

Теорему доведено. ■

Формулу площі бічної поверхні для похилої призми буде доведено в § 5.

Задача

Діагональ правильної чотирикутної призми дорівнює d й утворює з площиною основи кут $60°$. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

Розв'язання

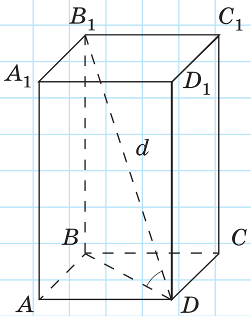


Рис. 18

1. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — задана правильна чотирикутна призма, $B_1D = d$ — її діагональ (рис. 18). Оскільки правильна призма є прямою, то $BB_1 \perp (ABC)$. Тоді відрізок BD — проекція діагоналі B_1D на площину основи ABC. Отже, $\angle B_1DB$ — кут нахилу діагоналі призми до площини основи; за умовою задачі $\angle B_1DB = 60°$.

Знайдемо площу бічної поверхні призми.

2. $S_{\text{бічн}} = P_{\text{осн}} \cdot H$, де $H = BB_1$ — бічне ребро призми. Оскільки дана чотирикутна призма є правильною, то її основа — квадрат $ABCD$; отже, $P_{\text{осн}} = 4AB$. Таким чином, $S_{\text{бічн}} = 4AB \cdot BB_1$.

3. З трикутника B_1DB ($\angle B = 90°$, $\angle D = 60°$, $B_1D = d$):

$$BB_1 = d\sin 60° = \frac{d\sqrt{3}}{2}, \quad BD = d\cos 60° = \frac{d}{2}.$$

4. Оскільки основа призми — квадрат $ABCD$, то $AB = \frac{BD}{\sqrt{2}}$, $AB = \frac{d}{2\sqrt{2}}$.

5. $S_{\text{бічн}} = 4 \cdot \frac{d}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{d\sqrt{3}}{2} = d^2\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{d^2\sqrt{6}}{2}$.

Відповідь: $\frac{d^2\sqrt{6}}{2}$.

Опишемо на прикладі цієї задачі загальний підхід до розв'язування стереометричних задач на обчислення. Виокремимо чотири основні етапи розв'язування.

1 етап. ***Побудова рисунка й обґрунтування відстаней та кутів з умови задачі.***

На цьому етапі необхідно на підставі умови задачі визначити особливості взаємного розміщення елементів розглядуваної фігури і відобразити їх на рисунку, вибравши найбільш вдалий спосіб розміщення фігури та її елементів. У тексті розв'язання необхідно встановити відповідність між даними, наведеними в умові задачі, та елементами рисунка. При цьому окремо обґрунтовуються:

- відстані від точки до прямої та площини;
- відстані між паралельними прямими й площинами, відстані та кути між мимобіжними прямими;
- кути між прямою і площиною, між мимобіжними прямими;
- двогранні кути, кути між площинами.

Зокрема, у розв'язанні даної задачі (крок 1) ми окремо обґрунтували кут нахилу діагоналі до площини основи призми.

2 етап. ***Вибір формули й визначення послідовності розв'язування.***

На цьому етапі необхідно визначити формулу, за якою буде обчислено шукану величину, і встановити, які допоміжні величини і в якому порядку необхідно знайти для застосування вибраної формули. Зауважимо, що послідовність знаходження допоміжних величин, як правило, не є довільною: розв'язування задачі зазвичай починають із розгляду тих плоских фігур, у яких за умовою задачі відомо більше елементів.

Наприклад, у даній задачі (крок 2) для застосування формули $S_{\text{бічн}} = P_{\text{осн}} \cdot H$ необхідно знайти бічне ребро і сторону основи призми.

3 етап. ***Обчислення допоміжних величин.***

Відповідно до наміченого плану розв'язування необхідно знайти допоміжні величини, визначені на попередньому етапі. Як правило, для цього треба розглянути декілька плоских фігур: так у даній задачі (кроки 3, 4) ми знайшли допоміжні величини з прямокутного трикутника B_1DB і квадрата $ABCD$.

Зазначимо також, що в деяких випадках плоскі фігури, елементи яких обчислюються, зручно зображати на окремих (винесених) рисунках.

4 етап. ***Отримання результату.***

Знайдені величини необхідно підставити у формулу, визначену на другому етапі, й обчислити шукану величину (або спростити отриманий буквений вираз).

Зауважимо, що в остаточній відповіді бажано позбутися ірраціональностей у знаменниках дробів (що й було зроблено на п'ятому кроці розв'язання даної задачі).

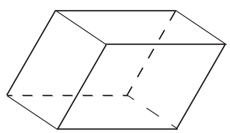
Зрозуміло, що реалізація окремих кроків, передбачених планом, не відображається в записі розв'язання: зокрема, вибрати вдале розміщення фігури на рисунку можна подумки або на чернетці, а порядок відшукання допоміжних величин визначають усно. Але всі необхідні обґрунтування з посиланнями на дані, наведені в умові задачі, аксіоми, означення, теореми й опорні факти треба записати.

2.3. Паралелепіпед. Куб

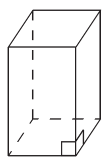
Окремими випадками призм є добре відомі вам паралелепіпед і куб. Тому якщо досі вони розглядалися лише на підставі наочного уявлення, то тепер ми можемо дати строгі означення цих фігур і дослідити їхні властивості.

Означення

Паралелепіпедом називається призма, основою якої є паралелограм.



а



б

Рис. 19. Похилий і прямий паралелепіпеди

На рис. 19, *а* зображено ***похилий паралелепіпед***, а на рис. 19, *б* — ***прямий паралелепіпед*** (тобто пряму призму, основою якої є паралелограм). Дві грані паралелепіпеда, які не мають спільних вершин, називають ***протилежними гранями***, а дві грані зі спільними вершинами (а отже, і спільним ребром) — ***сусідніми гранями***.

Звернемо увагу на те, що ***всі грані паралелепіпеда — паралелограми***, тому будь-яку грань паралелепіпеда можна вважати його основою (для довільної призми це не так).

Теорема (властивості паралелепіпеда)

У паралелепіпеді:
1) протилежні грані паралельні й рівні;
2) діагоналі перетинаються в одній точці й точкою перетину діляться навпіл.

Доведення

□ Розглянемо паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 20). Оскільки чотирикутники $ABCD$ і AA_1B_1B — паралелограми, то $AD \parallel BC$, $AA_1 \parallel BB_1$, звідки, за ознакою паралельності площин, площини граней AA_1D_1D і BB_1C_1C паралельні. Крім того, оскільки всі грані паралелепіпеда — паралелограми, то відрізки AB, A_1B_1, D_1C_1 і DC паралельні й рівні, тобто існує паралельне перенесення (на вектор $\overrightarrow{AB}$), яке переводить грань AA_1D_1D у грань BB_1C_1C. Звідси випливає, що вказані грані рівні. Паралельність і рівність двох інших пар протилежних граней доводиться аналогічно.

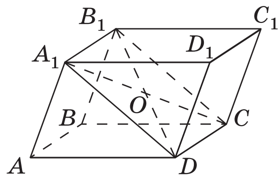


Рис. 20. До доведення властивостей паралелепіпеда

Доведемо тепер властивість діагоналей паралелепіпеда. Для цього розглянемо чотирикутник A_1B_1CD. Оскільки $A_1B_1 \parallel CD$ і $A_1B_1 = CD$ (поясніть чому), то цей чотирикутник — паралелограм. Звідси випливає, що його діагоналі A_1C і B_1D, які водночас є діагоналями даного паралелепіпеда, точкою перетину O діляться навпіл. Аналогічно, розглядаючи чотирикутник AB_1C_1D, можна довести, що його діагоналі B_1D і AC_1 (які також є діагоналями даного паралелепіпеда) діляться точкою перетину навпіл. Але точка O — середина B_1D, а отже, і середина AC_1. Отже, діагоналі паралелепіпеда A_1C, B_1D і AC_1 перетинаються в точці O і діляться нею навпіл. І нарешті, розглядаючи чотирикутник A_1BCD_1, так само можна довести, що діагональ BD_1 проходить через точку O і ділиться нею навпіл. Теорему доведено. ■

Наслідок

Точка перетину діагоналей паралелепіпеда є центром його симетрії.

Означення

Прямокутним паралелепіпедом називається прямий паралелепіпед, основою якого є прямокутник.

Очевидно, що ***всі грані прямокутного паралелепіпеда — прямокутники***, а всі його діагоналі рівні. Окремим випадком прямокутного паралелепіпеда є правильна чотирикутна призма —

Рис. 21. Предмети, що мають форму прямокутних паралелепіпедів

прямокутний паралелепіпед з основою-квадратом. Узагалі, прямокутні паралелепіпеди — найбільш поширений вид призм: предмети, що мають форму прямокутних паралелепіпедів, оточують нас майже всюди (рис. 21).

Довжини трьох попарно непаралельних ребер прямокутного паралелепіпеда називають його ***вимірами*** і зазвичай позначають a, b і c. Доведемо теорему, яка дозволяє обчислити довжину діагоналі прямокутного паралелепіпеда за трьома його вимірами.

Теорема (про діагональ прямокутного паралелепіпеда)

Квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів трьох його вимірів:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Доведення

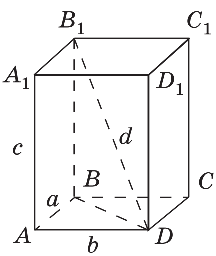


Рис. 22. До доведення просторової теореми Піфагора

☐ Нехай у прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 22) $AB = a$, $AD = b$, $AA_1 = c$. Розглянемо діагональ $B_1D = d$ даного паралелепіпеда. З трикутника B_1DB ($\angle B = 90°$) за теоремою Піфагора $B_1D^2 = BD^2 + B_1B^2$. З трикутника ABD ($\angle A = 90°$) за теоремою Піфагора $BD^2 = AB^2 + AD^2$. Отже, $B_1D^2 = AB^2 + AD^2 + B_1B^2$. Оскільки ребра AB, AD і B_1B не паралельні, то їхні довжини є вимірами даного паралелепіпеда, тобто $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$. ■

Зауважимо, що дана теорема є просторовим аналогом теореми Піфагора (для прямокутного трикутника), тому її інколи називають *просторовою теоремою Піфагора*.

Задача

Площі трьох граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 4 м^2, 8 м^2 і 32 м^2. Знайдіть діагональ паралелепіпеда.

Розв'язання

Нехай a, b і c — виміри даного паралелепіпеда. На підставі умови задачі отримуємо систему рівнянь: $\begin{cases} ab = 4, \\ bc = 8, \\ ac = 32. \end{cases}$

Перемноживши три рівняння системи, одержимо $a^2b^2c^2 = 1024$, звідки $abc = 32$. З цієї рівності й рівнянь системи знаходимо $a = 4$, $b = 1$, $c = 8$. За теоремою про діагональ прямокутного паралелепіпеда $d^2 = 4^2 + 1^2 + 8^2 = 81$, звідки $d = 9$ м.

Відповідь: 9 м.

Означення

Кубом називається прямокутний паралелепіпед, у якому всі ребра рівні.

На рис. 23 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. З означення куба випливає, що ***всі грані куба — рівні квадрати***.

Зв'язок між вивченими видами призм ілюструє схема на наступній сторінці.

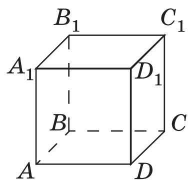
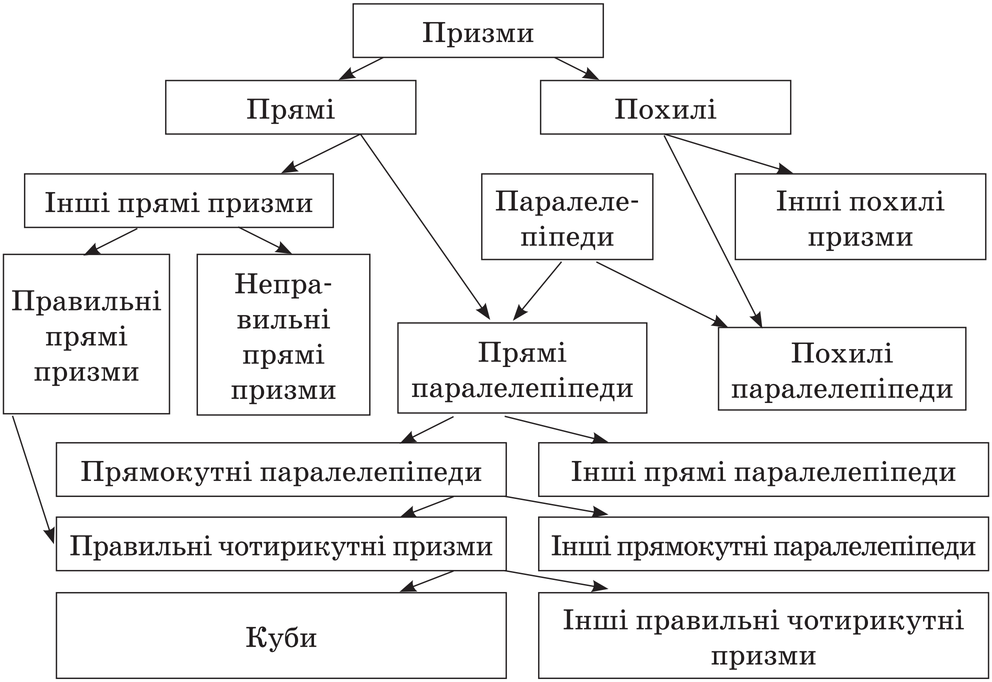


Рис. 23. Куб

2.4. Правила означення понять

Формулювання правильних з точки зору логіки означень основних понять завжди є однією з найбільш складних проблем будь-якої науки. Не є виключенням і геометрія: виявляється, що такі загальновідомі й легкі для розпізнавання фігури, як призма, піраміда тощо, приховують логічні пастки, у які потрапляли навіть відомі вчені, намагаючись дати строгі означення цих фігур.

Особливо багато логічних помилок пов'язано з означенням призми. Наприклад, в одному з підручників геометрії було наведено таке означення: «Призмою називається многогранник, дві грані якого — рівні многокутники з відповідно паралельними сторонами, а решта граней — паралелограми». Здавалося б, усе правильно — будь-яка призма дійсно задовольняє наведене означення.



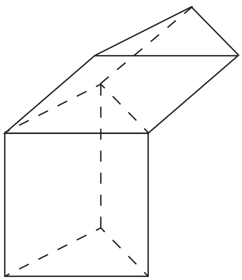


Рис. 24

Але поглянемо на рис. 24: фігура, зображена на ньому, являє собою об'єднання двох трикутних призм — прямої (вона розміщена знизу) і похилої, основою якої є такий самий трикутник. Звичайно ж, така фігура не є призмою, але вона повністю задовольняє наведене означення (переконайтеся в цьому самостійно).

У чому ж криється причина помилки? Ідеться про те, що в будь-якому означенні ми маємо справу з двома поняттями — означуваним (у даному випадку це поняття «призма») і тим, за допомогою якого ми описуємо означуване поняття (у даному випадку це поняття «многогранник, дві грані якого — рівні многокутники з відповідно паралельними сторонами, а решта граней — паралелограми»). Одна з основних вимог до логічно правильних означень полягає в тому, що обидва ці поняття мають бути тотожними, тобто описувати ту саму множину предметів. У нашому ж випадку множина многогранників, грані яких мають описані властивості, ширша за множину призм, тобто окрім власне призм включає в себе і інші многогранники (зокрема, фігуру на рис. 24).

Аби допомогти вам уникнути подібних помилок, визначимо три основних правила формулювання означення понять.

1) ***Означення має бути співмірним***, тобто множина предметів, які представляють означуване поняття, має збігатися з множиною предметів, за допомогою яких ми його описуємо. Якщо цього правила не дотримано, виникають типові помилки:

- занадто широке означення (опис включає окрім предметів, які є представниками означуваного поняття, й інші предмети): наприклад, означення «Лампа — це джерело світла» є неправильним, оскільки крім ламп існують й інші джерела світла;
- занадто вузьке означення (означуване поняття повною мірою не потрапляє під наведений опис): означення «Дріб називається неправильним, якщо його чисельник більший за знаменник» не враховує неправильні дроби, що дорівнюють одиниці;
- означення в одному розумінні широке, а в іншому — вузьке: наприклад, означення «Діжка — це ємність для зберігання рідин» є, з одного боку, широким (адже ємностями для зберігання рідин є також цебра, пляшки тощо), а з другого — вузьким (адже в діжці можна зберігати не лише рідини).

2) ***Означення не повинно містити «логічного кола»***, тобто означуване поняття і поняття, за допомогою якого означають, не можна описувати одне через інше. Наприклад, якщо ми означуємо обертання як рух навколо своєї осі, то не можемо означати вісь як пряму, навколо якої відбувається обертання. «Логічне коло» виникає і тоді, коли обидва поняття в означенні виражені майже тими самими словами, як-то «Фільтр — це прилад, за допомогою якого здійснюється фільтрація» або «Подібністю називається перетворення, яке переводить даний трикутник у подібний» (такі логічні помилки називають тавтологіями).

3) ***Означення має бути чітким і зрозумілим***, тобто воно не повинне містити не властивих науці двозначностей, метафор, порівнянь на кшталт «Повторення — це мати навчання», «Математика — цариця наук» тощо.

Дотримуючись цих правил, ви зможете чітко висловлювати свої думки й пояснювати співрозмовнику, що саме ви маєте на увазі — а це вміння є запорукою успіху не лише в геометрії, але й у будь-якій царині вашої майбутньої діяльності.

Запитання і задачі

Обговорюємо теорію

41. Скільки граней, вершин і ребер має n-кутна призма? Чи існує призма, яка має 50 бічних ребер; рівно 50 ребер? Скільки ребер має многокутник, що лежить в основі призми, яка має 100 граней?

42. Порівняйте:
а) бічні ребра прямої і похилої призм, якщо висоти цих призм рівні;
б) висоти прямої і похилої призм, якщо бічні ребра цих призм рівні.

43. Чи може бічна грань похилої призми бути прямокутником? Наведіть приклад.

44. Чи завжди:
а) призма, основа якої — правильний многокутник, є правильною;
б) правильна призма є прямою;
в) пряма призма є правильною?

45. Яку градусну міру має двогранний кут при бічному ребрі:
а) правильної трикутної призми;
б) правильної чотирикутної призми?

46. Чи є правильним твердження:
а) будь-який прямий паралелепіпед є прямокутним;
б) будь-який прямокутний паралелепіпед є прямим;
в) існує правильна чотирикутна призма, яка не є прямокутним паралелепіпедом;
г) існує прямокутний паралелепіпед, який не є правильною чотирикутною призмою?

47. Перекладіть англійською (або іншою іноземною мовою) терміни «призма», «паралелепіпед», «куб», «ребро призми», «грань призми», «висота паралелепіпеда», «діагональ паралелепіпеда».

48. Чи завжди:
а) прямий паралелепіпед, усі ребра якого рівні, є кубом;
б) прямокутний паралелепіпед, усі ребра якого рівні, є кубом?

Моделюємо

49.° Змоделюйте з дроту каркаси двох трикутних призм з відповідно рівними основами й рівними висотами — пряму й похилу. На яку призму пішло більше дроту?

50.° Чотири грані паралелепіпеда — прямокутники. Чи означає це, що даний паралелепіпед прямокутний? Відповідь підтвердьте моделлю.

51. За допомогою програми Geogebra або іншого графічного редактора з підтримкою 3D-моделювання зобразіть прямий паралелепіпед, прямокутний паралелепіпед, куб. Змоделюйте їх можливий вигляд залежно від розміщення відносно очей глядача.

Розв’язуємо задачі

Рівень А

52.° Доведіть, що коли одне бічне ребро призми перпендикулярне до площини основи, то призма є прямою.

53.° Площини двох граней призми перпендикулярні до площини основи. Доведіть, що коли ці грані мають спільне ребро, то дана призма є прямою.

54. Бічне ребро похилої призми дорівнює 12 см і нахилене до площини основи під кутом 45°. Знайдіть висоту призми.

55. Діагональ грані правильної трикутної призми дорівнює 5 см, а бічне ребро 3 см. Знайдіть площу основи призми.

56. У правильній чотирикутній призмі діагональ дорівнює 13 см, а площа основи 72 см^2. Знайдіть висоту призми.

57. Основою прямої призми є прямокутний трикутник з катетами a і $a\sqrt{3}$. Знайдіть двогранні кути при бічних ребрах призми.

58. Усі ребра правильної шестикутної призми дорівнюють 6 см. Знайдіть діагоналі призми.

59. За стороною основи a і бічним ребром b знайдіть площу повної поверхні правильної n-кутної призми, якщо:

а) $n=3$; б) $n=4$; в) $n=6$.

60. Висота правильної трикутної призми дорівнює 10 см, а площа бічної поверхні — 240 см^2. Знайдіть площу основи призми.

61. Площа повної поверхні правильної чотирикутної призми дорівнює 130 см^2, а площа основи — 25 см^2. Знайдіть діагональ призми.

62. Для зберігання торфу викопують траншею, дно й похилі стінки якої укріплюють дошками (поперечний переріз траншеї зображено на рис. 25, лінійні розміри подано в метрах). Знайдіть площу укріплення траншеї завдовжки 10 м.

63. Стелю й бічні стінки гаража, довжина якого дорівнює 7 м, необхідно обшити жерстю (поперечний переріз гаража зображено на рис. 26, лінійні розміри подано в метрах). Знайдіть площу обшивки.

64. Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють 4 см і 9 см, а кут між ними 30°. Знайдіть площу повної поверхні паралелепіпеда, якщо його висота 10 см.

65. Усі грані паралелепіпеда — ромби зі стороною a і кутом α. Знайдіть площу повної поверхні паралелепіпеда.

66. Площа повної поверхні прямого паралелепіпеда дорівнює 224 см^2. Знайдіть висоту паралелепіпеда, якщо його основа — ромб зі стороною 8 см і висотою 4 см.

67. Знайдіть діагональ і площу повної поверхні прямокутного паралелепіпеда, виміри якого дорівнюють:

а) 1, 4 і 8; б) 2, 5 і 14; в) 2, 6 і 9.

68 (опорна). Доведіть, що:

а) ***діагональ куба з ребром а дорівнює*** $a\sqrt{3}$;

б) ***ребро куба з діагоналлю d дорівнює*** $\dfrac{d}{\sqrt{3}}$.

69. Діагональ правильної чотирикутної призми дорівнює 9 см, а діагональ бічної грані — $\sqrt{65}$ см. Знайдіть сторону основи й висоту призми.

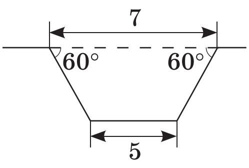


Рис. 25

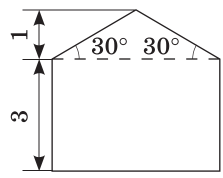


Рис. 26

70. Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює d й утворює з площинами його бічних граней кути α і β. Знайдіть площу основи паралелепіпеда.

71. Виміри прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 5, 12 і 13. Знайдіть кут нахилу діагоналі паралелепіпеда до площини його найменшої грані.

Рівень Б

72. Скільки діагоналей має n-кутна призма?

73. Основою похилої призми $ABCA_1B_1C_1$ є рівнобедрений трикутник ABC. Бічне ребро BB_1 утворює з бічними сторонами основи BA і BC рівні кути. Доведіть, що:

а) $BB_1 \perp AC$;

б) AA_1C_1C — прямокутник.

74. Діагональ правильної чотирикутної призми утворює з площиною бічної грані кут 30°. Доведіть, що бічне ребро призми дорівнює діагоналі її основи.

75. Основа прямої призми — прямокутний трикутник. Діагоналі бічних граней призми дорівнюють 8 см, 14 см і 16 см. Знайдіть висоту призми.

76. Основа прямої призми — ромб з діагоналями 10 см і 24 см. Знайдіть більшу діагональ призми, якщо її менша діагональ нахилена до площини основи під кутом 45°.

77. Основа прямої призми — трикутник зі сторонами 7 см і 8 см та кутом між ними 120°. Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо площа її найбільшої бічної грані дорівнює 65 см^2.

78. В основі прямої призми лежить рівнобічна трапеція з бічною стороною 13 см і радіусом вписаного кола 6 см. Знайдіть площу повної поверхні призми, якщо діагональ найбільшої бічної грані нахилена до площини основи під кутом 45°.

79. Основою прямої призми є трикутник зі сторонами 9 см, 10 см і 17 см. Знайдіть бічне ребро призми, якщо площа її повної поверхні дорівнює 360 см^2.

80. Основа похилої призми — квадрат зі стороною 4 см. Дві бічні грані призми перпендикулярні до площини основи, а дві інші утворюють з нею кути 60°. Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо її висота дорівнює $2\sqrt{3}$ см.

81. Основою похилої призми є рівнобедрений прямокутний трикутник із гіпотенузою 4 см. Бічне ребро, що виходить з вершини прямого кута основи, дорівнює 5 см і утворює з катетами трикутника кути 45°. Знайдіть площу повної поверхні призми.

82. Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють 3 см і 5 см, а кут між ними 60°. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда, якщо його більша діагональ нахилена до площини основи під кутом 45°.

83. Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють 5 см і 10 см, а одна з діагоналей основи — 13 см. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда, якщо його менша діагональ утворює з бічним ребром кут 45°.

84. Діагональ прямокутного паралелепіпеда утворює з трьома його гранями, що мають спільну вершину, кути α, β і γ. Доведіть, що $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1$.

85. Доведіть, що сума квадратів діагоналей будь-якого паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів усіх його ребер.

86. Знайдіть діагональ прямокутного паралелепіпеда, якщо:
а) діагоналі трьох його граней дорівнюють 11 см, 19 см і 20 см;
б) периметри трьох його граней дорівнюють 10 см, 18 см і 24 см;
в) площі трьох його граней дорівнюють 12 см^2, 36 см^2 і 48 см^2.

87. Знайдіть відстань від вершини куба з ребром a до його діагоналі, яка не містить дану вершину.

88. Основа прямого паралелепіпеда — ромб із більшою діагоналлю d. Більша діагональ паралелепіпеда утворює з площиною його основи кут α, а діагональ бічної грані нахилена до площини основи під кутом β. Знайдіть бічну поверхню паралелепіпеда.

89. Площа основи правильної чотирикутної призми дорівнює Q. Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо кут між її діагоналлю та бічним ребром дорівнює α.

Рівень В

90. Дано правильну чотирикутну призму $ABCDA_1B_1C_1D_1$ зі стороною основи 4 см і бічним ребром 15 см. Знайдіть найкоротшу відстань по поверхні призми від середини ребра BC до середини ребра A_1D_1.

91. Основою прямого паралелепіпеда є ромб із гострим кутом α. Менша діагональ паралелепіпеда дорівнює l і утворює з бічною гранню кут β. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.

92. Діагональ прямокутного паралелепіпеда утворює з двома його ребрами, що виходять з однієї вершини, кути $45°$ і $60°$. Знайдіть кут між даною діагоналлю і третім ребром, яке виходить з тієї самої вершини.

93. Площа бічної поверхні правильної чотирикутної призми дорівнює S. Діагональ призми утворює з площиною основи кут α. Знайдіть площу основи призми.

94. Усі ребра похилого паралелепіпеда дорівнюють a. Основою паралелепіпеда є квадрат, а одна з вершин верхньої основи рівновіддалена від усіх вершин нижньої основи. Знайдіть площу повної поверхні паралелепіпеда.

95. Основою похилого паралелепіпеда є квадрат зі стороною 6 см. Одна з вершин верхньої основи паралелепіпеда рівновіддалена від усіх сторін нижньої основи. Знайдіть площу повної поверхні паралелепіпеда, якщо його висота дорівнює 4 см.

Повторення перед вивченням § 3

Теоретичний матеріал

- правильні многокутники; 9 клас, § 18
- теорема про три перпендикуляри; 10 клас, § 10
- перпендикулярність площин. 10 клас, § 12

Задачі

96. Точка M не лежить у площині ромба $ABCD$. Доведіть, що коли $MA = MC$ і $MB = MD$, то площини MAC і MBD перпендикулярні.

97. Точка P не лежить у площині рівностороннього трикутника ABC і рівновіддалена від його вершин. Доведіть, що точка P рівновіддалена від сторін трикутника ABC.

§3 Піраміда. Правильна піраміда

3.1. Піраміда та її елементи

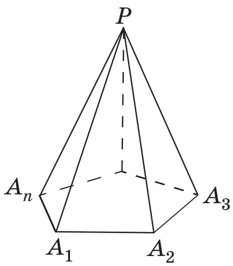


Рис. 27. Піраміда

Розглянемо зображений на рис. 27 многокутник $A_1A_2...A_n$ і точку P, яка не лежить у площині цього многокутника. Відрізки, які сполучають точку P з точками плоского многокутника $A_1A_2...A_n$, утворюють многогранник, який називають пірамідою.

Означення

Пірамідою називається многогранник, що складається з плоского многокутника *(основи піраміди)*, точки, яка не лежить у площині основи *(вершини піраміди)*, і всіх відрізків, що сполучають вершину з точками основи.

Піраміда — грецьке слово. За однією версією, походить від єгипетського «пер'о» — великий будинок (так єгиптяни називали усипальниці фараонів), за іншою — від грецького «пір» — вогонь (піраміди традиційно пов'язували зі стихією вогню).

На рис. 27 зображено піраміду з вершиною P, основа якої — плоский n-кутник $A_1A_2...A_n$. Таку піраміду називають ***n*-кутною пірамідою** і позначають $PA_1A_2...A_n$.

Відрізки $PA_1, PA_2, ..., PA_n$, які сполучають вершину піраміди з вершинами її основи, називають ***бічними ребрами піраміди***, а трикутники $PA_1A_2, PA_2A_3, ..., PA_nA_1$, вершинами яких є вершина піраміди й дві сусідні вершини основи, — ***бічними гранями піраміди***. Кути $A_1PA_2, A_2PA_3, ..., A_nPA_1$ називають ***плоскими кутами при вершині піраміди***. Двогранний кут, утворений півплощинами, одна з яких містить бічну грань піраміди, а друга — основу піраміди, називають ***двогранним кутом при основі піраміди***. Наприклад, на рис. 27 двогранний кут при ребрі A_2A_3 основи піраміди визначається так:

за ребро двогранного кута береться пряма A_2A_3, а за грані — півплощини, які містять грані PA_2A_3 і $A_1A_2...A_n$.

Трикутну піраміду інакше називають ***тетраедром*** (рис. 28). Звернемо увагу на те, що, оскільки всі грані тетраедра — трикутники, будь-яку його грань можна вважати основою (для довільної піраміди це не так).

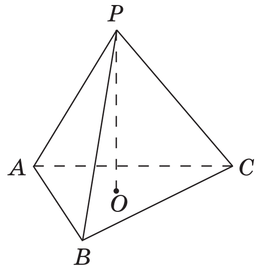


Рис. 28. Тетраедр

Тетраедр — від грецького «тетраедр» — чотиригранник.

У шкільному курсі ми розглядатимемо лише піраміди, основами яких є опуклі многокутники. Такі піраміди є опуклими многогранниками.

Означення

Висотою піраміди називається перпендикуляр, проведений із вершини піраміди до площини її основи.

На рис. 28 відрізок PO — висота трикутної піраміди $PABC$.

Зображення піраміди будують відповідно до правил паралельного проектування. Побудову зазвичай розпочинають з основи. Потім позначають вершину піраміди і сполучають її з вершинами основи. Для деяких видів пірамід, які розглядатимуться далі, доречно після побудови основи піраміди одразу побудувати її висоту.

Площею бічної поверхні піраміди називається сума площ її бічних граней, а ***площею повної поверхні*** — сума площ основи й бічної поверхні:

$$S_{\text{повн}} = S_{\text{бічн}} + S_{\text{осн}}.$$

3.2. Правильна піраміда

Означення

Правильною пірамідою називається піраміда, основою якої є правильний многокутник, а основа висоти піраміди є центром цього многокутника.

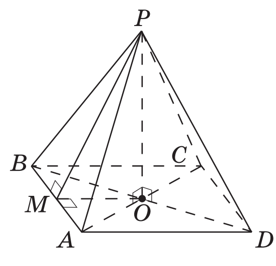


Рис. 29. Правильна чотирикутна піраміда

На рис. 29 зображено правильну чотирикутну піраміду $PABCD$. Її основою є квадрат $ABCD$, а основа висоти PO — точка O — є точкою перетину діагоналей (центром) цього квадрата. Обґрунтуємо на прикладі цієї піраміди деякі властивості правильних пірамід (для довільної піраміди доведення аналогічне). Спочатку доведемо, що прямокутні трикутники PAO, PBO, PCO і PDO рівні. Справді, оскільки точка O — центр кола, описаного навколо основи піраміди, то $OA = OB = OC = OD$. Тоді $\triangle PAO = \triangle PBO = \triangle PCO = \triangle PDO$ як прямокутні за двома катетами. З рівності розглядуваних трикутників випливає, що ***всі бічні ребра правильної піраміди рівні, однаково нахилені до площини основи й утворюють однакові кути з висотою піраміди, а всі бічні грані є рівними рівнобедреними трикутниками***.

Означення

Апофемою називається висота бічної грані правильної піраміди, проведена з її вершини.

На рис. 29 відрізок PM — апофема правильної піраміди $PABCD$. Оскільки всі бічні грані правильної піраміди рівні, то і ***всі апофеми правильної піраміди рівні***. А з цього, зокрема, випливає, що ***всі двогранні кути при основі правильної піраміди рівні*** (обґрунтуйте це самостійно).

Теорема (формула площі бічної поверхні правильної піраміди)

Площа бічної поверхні правильної піраміди дорівнює півдобутку периметра її основи на апофему:

$$S_{\text{бічн}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} \cdot l.$$

Доведення

□ Нехай сторона основи правильної n-кутної піраміди дорівнює a, апофема — l. Тоді площа однієї бічної грані піраміди становить $\frac{1}{2}al$. Бічна поверхня піраміди складається з n таких граней.

Отже, $S_{\text{бічн}} = n \cdot \frac{1}{2}al = \frac{1}{2}(na)l = \frac{1}{2}P_{\text{осн}} \cdot l$.

Теорему доведено. ■

Задача

У правильній трикутній піраміді двогранний кут при основі дорівнює α. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, якщо її висота дорівнює H.

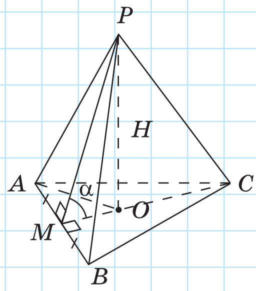


Рис. 30

Розв'язання

1. Нехай дано правильну трикутну піраміду $PABC$ (рис. 30), $PO \perp (ABC)$, PO — висота піраміди; за умовою задачі $PO = H$. Проведемо $PM \perp AB$, PM — апофема правильної піраміди $PABC$. Відрізок OM — проекція похилої PM на площину ABC. Тоді за теоремою про три перпендикуляри $OM \perp AB$. Отже, $\angle PMO$ — лінійний кут двогранного кута при ребрі основи AB; за умовою задачі $\angle PMO = \alpha$. Оскільки трикутник ABC рівносторонній, точка O — центр трикутника, який належить медіані, бісектрисі й висоті CM.

Знайдемо площу бічної поверхні піраміди.

2. $S_{\text{бічн}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} \cdot PM = \frac{3}{2} AB \cdot PM$.

3. З трикутника PMO ($\angle O = 90^\circ$, $\angle M = \alpha$, $PO = H$):

$$PM = \frac{H}{\sin\alpha}, \quad OM = H\operatorname{ctg}\alpha.$$

4. Відрізок OM — радіус кола, вписаного в трикутник ABC. Тоді $OM = \frac{AB}{2\sqrt{3}}$, звідки $AB = 2\sqrt{3}\,OM$, $AB = 2\sqrt{3}H\operatorname{ctg}\alpha$.

5. $S_{\text{бічн}} = \frac{3}{2} \cdot 2\sqrt{3}H\operatorname{ctg}\alpha \cdot \frac{H}{\sin\alpha} = \frac{3\sqrt{3}H^2\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$.

Відповідь: $\frac{3\sqrt{3}H^2\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$.

Зауважимо, що під час розв'язування багатьох задач про правильні піраміди окремо розглядають прямокутні трикутники на кшталт трикутників *PAO* і *PMO* (рис. 30) Зокрема, у трикутнику *PAO* *PO* — висота піраміди, *PA* — бічне ребро, *AO* — радіус кола, описаного навколо основи піраміди; у трикутнику *PMO* *PO* — висота піраміди, *PM* — апофема, *MO* — радіус кола, вписаного в основу піраміди.

3.3. Знаходження відстані від точки до площини бічної грані піраміди

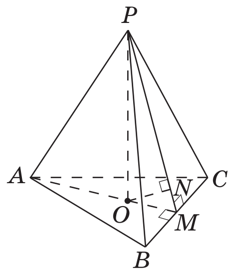


Рис. 31

У деяких задачах про піраміди необхідно знайти відстань від даної точки піраміди до бічної грані, яка не містить дану точку. Нехай, наприклад, у правильній трикутній піраміді $PABC$ (рис. 31) треба побудувати відстань від основи висоти PO — точки O — до бічної грані PBC. Зрозуміло, що можна було б опустити з точки O перпендикуляр ON до площини PBC. Але така побудова не дозволяє одразу визначити особливості розміщення точки N у трикутнику PBC, які можуть стати в пригоді у процесі подальшого розв'язування задачі. Між тим, виявляється, що точка N належить апофемі PM даної піраміди.

Для того щоб отримати цей факт у процесі знаходження відстані від точки O до площини PBC, можна міркувати таким чином.

1. Нехай $PM \perp BC$, PM — апофема даної правильної піраміди. Оскільки $PO \perp (ABC)$, а відрізок OM — проекція похилої PM на площину ABC, то за теоремою про три перпендикуляри $OM \perp BC$.

2. Оскільки пряма BC перпендикулярна до двох прямих площини POM ($BC \perp PM$, $BC \perp OM$), то за ознакою перпендикулярності прямої і площини $BC \perp (POM)$.

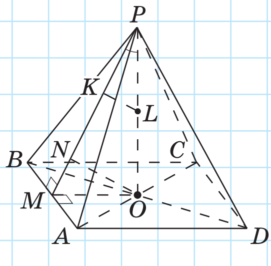
3. Оскільки площина PBC містить пряму BC, перпендикулярну до площини POM, то за ознакою перпендикулярності площин $(PBC) \perp (POM)$.

4. Проведемо в площині POM перпендикуляр ON до прямої PM. Тоді $ON \perp (PBC)$ за властивістю двох перпендикулярних площин. Отже, відрізок ON — відстань від точки O до площини PBC.

Таким чином, ми побудували відрізок ON не як перпендикуляр до площини бічної грані піраміди, а як перпендикуляр до апофеми, і довели, що він водночас є перпендикуляром до площини PBC.

Задача

Висота правильної чотирикутної піраміди утворює з площиною бічної грані кут β. Відстань від середини висоти піраміди до бічної грані дорівнює m. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.



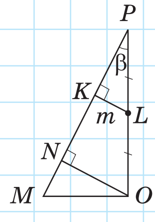


Рис. 32

Розв'язання

1. Нехай дано правильну чотирикутну піраміду $PABCD$ (рис. 32, *а*), $PO \perp (ABC)$, PO — висота піраміди. Проведемо $PM \perp AB$, PM — апофема правильної піраміди $PABCD$. Відрізок OM — проекція похилої PM на площину ABC. Тоді за теоремою про три перпендикуляри $OM \perp AB$.

2. Оскільки $AB \perp PM$, $AB \perp OM$, то за ознакою перпендикулярності прямої і площини $AB \perp (POM)$.

3. Оскільки площина PAB містить пряму AB, перпендикулярну до площини POM, то за ознакою перпендикулярності площин $(PAB) \perp (POM)$.

4. Проведемо в площині POM з точки O і з точки L — середини висоти PO — перпендикуляри: $ON \perp PM$ і $LK \perp PM$. Тоді $ON \perp (PAB)$, $LK \perp (PAB)$ за властивістю перпендикулярних площин. Отже, відрізок LK — відстань від середини висоти піраміди до бічної грані; за умовою задачі $LK = m$. Крім того, відрізок PN — проекція похилої OP на площину PAB, тобто $\angle OPN$ — кут між висотою піраміди і площиною бічної грані; за умовою задачі $\angle OPN = \beta$.

Знайдемо площу повної поверхні піраміди.

5. $S_{\text{повн}} = a^2 + \frac{1}{2} \cdot 4a \cdot PM = a^2 + 2a \cdot PM$, де a — сторона основи піраміди.

6. З трикутника PKL ($\angle K = 90^\circ$, $\angle P = \beta$, $KL = m$) $PL = \frac{m}{\sin\beta}$ (рис. 32, *б*).

Оскільки точка L — середина висоти PO, то $PO = \frac{2m}{\sin\beta}$.

7. З трикутника POM ($\angle O = 90^\circ$, $\angle P = \beta$, $PO = \frac{2m}{\sin\beta}$): $PM = \frac{PO}{\cos\beta}$,

$$PM = \frac{2m}{\sin\beta\cos\beta};\quad OM = PO\,\mathrm{tg}\,\beta,\quad OM = \frac{2m\,\mathrm{tg}\,\beta}{\sin\beta} = \frac{2m}{\cos\beta}.$$

8. Оскільки точка O — центр квадрата $ABCD$, $OM \perp AB$, то OM — радіус кола, вписаного у квадрат. Тоді $OM = \frac{a}{2}$, звідки $a = 2OM$, $a = \frac{4m}{\cos\beta}$.

9. $S_{\text{повн}} = \left(\frac{4m}{\cos\beta}\right)^2 + 2 \cdot \frac{4m}{\cos\beta} \cdot \frac{2m}{\sin\beta\cos\beta} = \frac{16m^2}{\cos^2\beta} + \frac{16m^2}{\cos^2\beta\sin\beta} = \frac{16m^2}{\cos^2\beta}\left(1 + \frac{1}{\sin\beta}\right)$.

Відповідь: $\frac{16m^2}{\cos^2\beta}\left(1 + \frac{1}{\sin\beta}\right)$.

Запитання і задачі

Обговорюємо теорію

98.° Скільки граней, вершин і ребер має n-кутна піраміда? Чи існує піраміда, яка має 19 бічних ребер; рівно 19 ребер?

99.° Чи обов'язково точки висоти піраміди є точками піраміди? Наведіть приклади.

100. За даними рис. 33, *а–в* визначте, чи є зображена піраміда правильною (PO — висота піраміди).

101. Усі бічні грані піраміди — рівні рівнобедрені трикутники. Чи обов'язково така піраміда є правильною? Наведіть контрприклад.

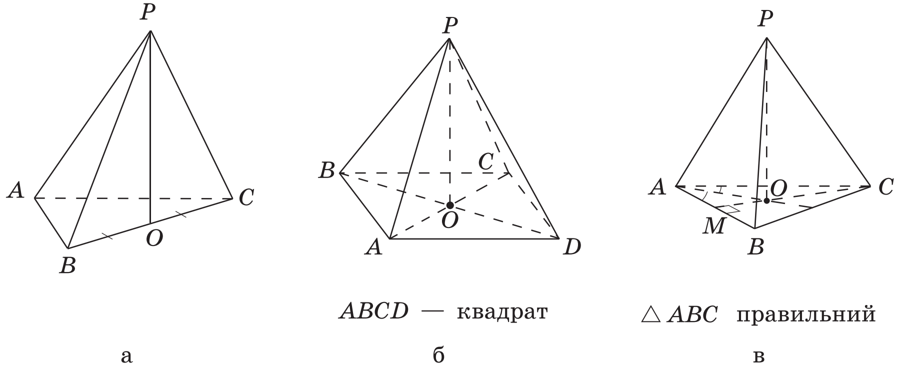


Рис. 33

102. Чи можуть усі плоскі кути при вершині правильної піраміди бути тупими; прямими? У яких межах може змінюватися величина плоского кута при вершині правильної піраміди:

а) трикутної;
б) чотирикутної;
в) шестикутної?

103. Чи можуть бути рівними всі ребра правильної шестикутної піраміди? Відповідь обґрунтуйте.

104. Бічне ребро правильної піраміди дорівнює b, висота — h, а апофема — l. Порівняйте числа b, h і l.

105. Перекладіть англійською (або іншою іноземною мовою) терміни «піраміда», «висота піраміди», «вершина піраміди», «основа піраміди», «правильна піраміда».

Моделюємо

106°. Нарисуйте піраміду, усі грані якої — прямокутні трикутники. Виготовте її модель з дроту. Чи має така піраміда вершину, усі плоскі кути при якій прямі? Чи можуть усі грані піраміди бути рівнобедреними прямокутними трикутниками?

107°. Нарисуйте на цупкому папері розгортку правильної чотирикутної піраміди. Чи може апофема такої піраміди бути вдвічі меншою за ребро основи? Чому? Виріжте отриману розгортку і складіть з неї модель піраміди.

108. За допомогою програми Geogebra або іншого графічного редактора з підтримкою 3D-моделювання змоделюйте правильну чотирикутну призму. Засобами програми побудуйте переріз піраміди площиною, паралельною площині її основи.

Розв'язуємо задачі

Рівень А

109°. Бічні ребра трикутної піраміди взаємно перпендикулярні й рівні. Доведіть, що основою піраміди є рівносторонній трикутник. Знайдіть площу цього трикутника, якщо кожне бічне ребро піраміди дорівнює $3\sqrt{2}$ см.

110.° Основою піраміди є ромб з діагоналями 10 см і 18 см. Висота піраміди проходить через точку перетину діагоналей ромба і дорівнює 12 см. Знайдіть бічні ребра піраміди.

111.° Основою піраміди $PABC$ є прямокутний трикутник ABC з гіпотенузою AC. Бічне ребро PB є висотою піраміди. Знайдіть площу основи піраміди, якщо $PA = 17$ см, $PB = 8$ см, $PC = 10$ см.

112.° Знайдіть:

а) сторону основи правильної піраміди з бічним ребром 13 см і апофемою 12 см;

б) апофему правильної чотирикутної піраміди зі стороною основи 18 см і висотою 12 см;

в) висоту правильної трикутної піраміди зі стороною основи $4\sqrt{3}$ см і бічним ребром 5 см.

113. Знайдіть:

а) апофему правильної піраміди зі стороною основи 12 см і площею бічної грані 24 см^2;

б) площу основи правильної чотирикутної піраміди з апофемою 5 см і висотою 4 см.

114. У правильній чотирикутній піраміді знайдіть:

а) висоту, якщо апофема дорівнює 5 см, а бічне ребро $\sqrt{34}$ см;

б) бічне ребро, якщо висота дорівнює $\sqrt{3}$ см, а двогранний кут при основі $60°$;

в) площу основи, якщо бічне ребро дорівнює $4\sqrt{2}$ см і нахилене до площини основи під кутом $45°$.

115. У правильній трикутній піраміді знайдіть:

а) висоту, якщо площа основи дорівнює $9\sqrt{3}$ см^2, а бічне ребро утворює з площиною основи кут $60°$;

б) бічне ребро, якщо сторона основи дорівнює $2\sqrt{3}$ см, а двогранний кут при основі $45°$.

116. Знайдіть площу бічної поверхні:

а) правильної трикутної піраміди зі стороною основи 6 см і апофемою 4 см;

б) правильної чотирикутної піраміди з діагоналлю основи 8 см і апофемою $5\sqrt{2}$ см;

в) правильної шестикутної піраміди зі стороною основи 10 см і бічним ребром 13 см.

117. Славетна піраміда Хеопса в Єгипті (рис. 34) до пошкоджень мала форму правильної чотирикутної піраміди з ребром основи 230 м і бічним ребром 218 м. Знайдіть висоту піраміди Хеопса (відповідь округліть до метрів). Знайдіть в мережі Інтернет інформацію стосовно піраміди Хеопса та інших єгипетських пірамід. Влаштуйте обмін знайденими матеріалами з однокласниками та однокласницями в соціальних мережах. Порівняйте обчислене вами значення висоти піраміди Хеопса з результатами вимірювань дослідників цієї піраміди.

Рис. 34. Піраміда Хеопса

118. У правильній шестикутній піраміді бічне ребро дорівнює 8 см, а плоский кут при вершині 30°. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

119. Знайдіть площу бічної поверхні правильної трикутної піраміди, апофема якої дорівнює 4 см, а плоскі кути при вершині прямі.

120. У правильній трикутній піраміді двогранний кут при основі дорівнює β. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, якщо відрізок, що сполучає середину апофеми із серединою висоти, дорівнює m.

121. Знайдіть площу бічної поверхні правильної чотирикутної піраміди, якщо її бічне ребро утворює зі стороною основи кут β, а апофема дорівнює l.

Рівень Б

122. Основою піраміди $PABCD$ є паралелограм $ABCD$, діагоналі якого перетинаються в точці O. Відомо, що $PA = PC$, $PB = PD$, $AB = 7$ м, $AD = 9$ м, $AC = 8$ м. Знайдіть бічні ребра піраміди, якщо її висота дорівнює 3 м.

123. Основа піраміди — паралелограм зі сторонами 6 см і 16 см та кутом 60°. Висота піраміди проходить через точку перетину діагоналей основи. Знайдіть її довжину, якщо бічне ребро, що виходить з вершини тупого кута паралелограма, дорівнює 25 см.

124. *(задача І. Ф. Шаригіна*)*. Доведіть, що всі грані трикутної піраміди $PABC$ — рівні трикутники, якщо:

а) $AB = PC$, $AC = PB$, $BC = PA$;

б) $AB = PC$, $AC = PB$, $\angle ABP = \angle BPC$;

в) $AB = PC$, $\angle ABP = \angle BAC$, $\angle PAB = \angle ABC$;

г) $\angle ABP = \angle BPC$, $\angle APB = \angle CBP$, $\angle APC = \angle BAP$.

125. Доведіть, що мимобіжні ребра правильної трикутної піраміди попарно перпендикулярні.

126. Усі ребра чотирикутної піраміди рівні. Доведіть, що дана піраміда є правильною.

127. У правильній трикутній піраміді знайдіть:

а) висоту, якщо сторона основи дорівнює 6 см, а плоский кут при вершині дорівнює $90°$;

б) бічне ребро, якщо площа основи піраміди дорівнює $3\sqrt{3}$ см^2, а двогранний кут при основі дорівнює $45°$;

в) апофему, якщо радіус кола, описаного навколо бічної грані, дорівнює R, а кут між бічним ребром і ребром основи дорівнює α.

128. У правильній чотирикутній піраміді знайдіть:

а) висоту, якщо площа основи дорівнює 8 см^2, а кут між апофемами двох суміжних бічних граней дорівнює $60°$;

б) сторону основи, якщо всі ребра піраміди рівні, а її висота дорівнює $5\sqrt{2}$ см.

129. У правильній трикутній піраміді сторона основи вдвічі більша за апофему. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, якщо її висота дорівнює $\sqrt{6}$ см.

130. Знайдіть площу повної поверхні правильної шестикутної піраміди, якщо площа її основи дорівнює $6\sqrt{3}$ см^2, а бічне ребро — $\sqrt{13}$ см.

131. Знайдіть площу повної поверхні правильної трикутної піраміди, у якій кут між висотою та апофемою дорівнює β, а основа висоти піраміди віддалена від апофеми на відстань m.

* І. Ф. Шаригін (1937–2004) — відомий російський математик, педагог і вчений, популяризатор геометрії.

132. Бічна грань правильної чотирикутної піраміди нахилена до площини основи під кутом α. Відрізок, що сполучає основу висоти піраміди із серединою апофеми, дорівнює d. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

133. Площа основи правильної піраміди становить половину площі її бічної поверхні. Знайдіть двогранний кут при основі піраміди.

134. Основа правильної піраміди — трикутник зі стороною 4 см. Бічні грані піраміди нахилені до площини основи під кутом $30°$. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

Рівень В

135. Усі ребра n-кутної піраміди рівні. Яким може бути значення n? Проведіть дослідження.

136. У правильній чотирикутній піраміді висота дорівнює 1, а плоский кут при вершині дорівнює γ. Знайдіть:

а) ребро основи;
б) апофему піраміди;
в) бічне ребро піраміди.

137. Основа висоти правильної чотирикутної піраміди $PABCD$ віддалена від площини бічної грані на 6 см. Знайдіть відстань від вершини D до площини PAB.

138. Двогранний кут при основі правильної трикутної піраміди дорівнює α. Точка висоти піраміди, що лежить на відстані a від її вершини, рівновіддалена від площин основи й бічної грані. Знайдіть:

а) висоту піраміди;
б) сторону основи.

139. Доведіть, що коли мимобіжні ребра трикутної піраміди попарно рівні, то сума плоских кутів при кожній її вершині дорівнює $180°$.

140. У трикутній піраміді сума плоских кутів при кожній вершині основи дорівнює $180°$. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, якщо площа її основи дорівнює S.

141. У правильній трикутній піраміді висота утворює з бічною гранню кут β. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, якщо відстань від вершини її основи до протилежної бічної грані дорівнює l.

142. У правильній чотирикутній піраміді двогранний кут при основі дорівнює α. Знайдіть площу повної поверхні піраміди, якщо відстань від середини її висоти до бічної грані дорівнює m.

143. У правильній трикутній піраміді відрізок, що сполучає основу висоти із серединою бічного ребра, нахилений до площини основи під кутом β. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, якщо її апофема дорівнює l.

144. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює H і утворює з площиною бічної грані кут β. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

Повторення перед вивченням § 4

Теоретичний матеріал

- вписані і описані чотирикутники; 8 клас, § 8
- розв'язування трикутників; 9 клас, § 1–5
- властивості точок, рівновіддалених від вершин і сторін многокутника; 10 клас, § 9, 10
- перпендикулярність площин; 10 клас, § 12
- площа ортогональної проекції многокутника. 10 клас, § 13

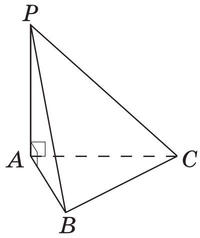
Задачі

145. Радіус кола, описаного навколо трикутника, дорівнює стороні трикутника. Знайдіть кут, протилежний до даної сторони, якщо вона є найбільшою стороною даного трикутника.

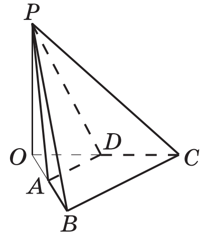
146. Площа ортогональної проекції рівнобедреного трикутника дорівнює 6 см^2. Знайдіть сторони трикутника, якщо його висота, проведена до основи, дорівнює 3 см, а кут між площиною трикутника і площиною проекції становить $60°$.

§4 Деякі види пірамід

4.1. Піраміди, у яких висота належить одній або двом бічним граням



а

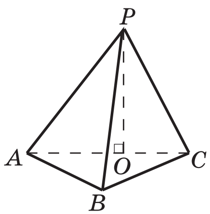


б

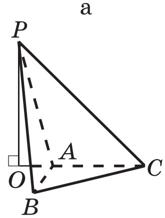
Рис. 35. Піраміди, у яких дві бічні грані перпендикулярні до площини основи

Розв'язування стереометричних задач про піраміди зазвичай розпочинається з побудови рисунка. Але в багатьох випадках для правильного відображення на рисунку взаємного розміщення елементів піраміди (зокрема, положення її висоти) необхідно провести попередній аналіз умови задачі та на підставі наявних даних визначити, які властивості має піраміда. Спробуємо встановити такі властивості для окремих видів пірамід.

Розглянемо спочатку піраміду, у якій дві бічні грані перпендикулярні до площини основи. За теоремою про дві площини, перпендикулярні до третьої, пряма перетину площин, які містять дані бічні грані, перпендикулярна до площини основи. Отже, ***якщо дві бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи, то пряма, по якій перетинаються відповідні площини, містить висоту піраміди***. Наприклад, на рис. 35, *а* сусідні грані PAB і PAC піраміди $PABC$ перпендикулярні до площини основи ABC, а висотою піраміди є їхнє спільне ребро PA. На рис. 35, *б* подано більш складний випадок: грані PAB і PCD, які не є сусідніми, перпендикулярні до площини основи піраміди, а висота піраміди PO лежить на прямій перетину площин PAB і PCD поза даною пірамідою (поясніть самостійно, чому ці площини перетинаються).



а

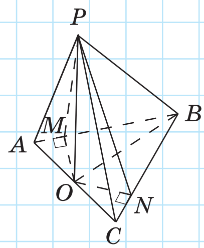


б

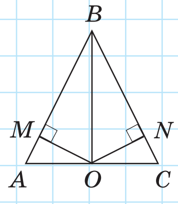
Рис. 36. Піраміди, у яких одна бічна грань перпендикулярна до площини основи

Розглянемо тепер піраміду $PABC$, у якій одна бічна грань PAC перпендикулярна до площини основи ABC (рис. 36). Неважко здогадатися, що висота даної піраміди PO належатиме площині грані PAC. Але якщо провести з вершини піраміди перпендикуляр PO до площини ABC, то обґрунтування належності точки O прямій AC буде досить громіздким. У цьому випадку варто вдатися до «хитрощів» — скористатися тим, що перпендикуляр, проведений в одній із двох перпендикулярних площин до прямої перетину цих площин, є перпендикуляром до другої площини. Отже, проведемо в площині PAC перпендикуляр PO до прямої AC; тоді за згаданою властивістю перпендикулярних площин $PO \perp (ABC)$, PO — висота піраміди.

Таким чином, ***якщо в піраміді одна бічна грань перпендикулярна до площини основи, то висота піраміди належить площині цієї грані та є перпендикуляром, проведеним із вершини піраміди до прямої перетину площини даної грані з площиною основи.*** Зауважимо, що основа висоти PO може лежати як на відрізку AC (рис. 36, *а*), так і поза ним (рис. 36, *б*).



а



б

Рис. 37

Задача

Основою піраміди є правильний трикутник. Одна бічна грань піраміди перпендикулярна до основи, а дві інші нахилені до неї під кутом β. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, якщо її висота дорівнює H.

Розв'язання

1. Нехай дано трикутну піраміду $PABC$, в основі якої лежить правильний трикутник ABC, $(PAC) \perp (ABC)$ (рис. 37, *а*). Проведемо в площині PAC $PO \perp AC$. Тоді за властивістю перпендикулярних площин $PO \perp (ABC)$, PO — висота піраміди; за умовою задачі $PO = H$.

2. Проведемо з точки O перпендикуляри до сторін основи: $OM \perp AB$, $ON \perp BC$. Відрізки OM і ON — проекції похилих PM і PN на площину ABC. За теоремою про три перпендикуляри $PM \perp AB$, $PN \perp BC$. Отже, кути PMO і PNO — лінійні кути двогранних кутів при ребрах основи AB і BC; за умовою задачі $\angle PMO = \angle PNO = \beta$.

Знайдемо площу бічної поверхні піраміди.

3. $S_{\text{бічн}} = S_{\triangle PAC} + S_{\triangle PAB} + S_{\triangle PBC}$.

4. Прямокутні трикутники PMO і PNO рівні за спільним катетом PO і протилежним кутом ($\angle PMO = \angle PNO = \beta$ за умовою). Звідси $OM = ON$. Тоді $\triangle AOM = \triangle CON$ (рис. 37, *б*) як прямокутні за катетом ($OM = ON$) і протилежним кутом ($\angle MAO = \angle NCO = 60°$, оскільки трикутник ABC рівносторонній). Отже, $AO = CO$. Тоді $PA = PC$ як похилі з рівними проекціями, проведені з точки P до площини ABC. Таким чином, $\triangle PAB = \triangle PCB$ за трьома сторонами (PB — спільна, $PA = PC$ за доведеним, $AB = CB$ як сторони рівностороннього трикутника ABC). Отже,

$$S_{\text{бічн}} = S_{\triangle PAC} + 2S_{\triangle PBC} = \frac{1}{2} PO \cdot AC + PN \cdot BC.$$

5. З трикутника PON ($\angle O = 90°$, $\angle N = \beta$, $PO = H$):

$$PN = \frac{H}{\sin\beta}, \quad ON = H \operatorname{ctg}\beta.$$

6. З трикутника ONC ($\angle N = 90°$, $\angle C = 60°$, $ON = H \operatorname{ctg}\beta$):

$$OC = \frac{ON}{\sin 60°}, \quad OC = \frac{2H \operatorname{ctg}\beta}{\sqrt{3}}.$$

Оскільки O — середина AC, то $AC = 2OC = \dfrac{4H \operatorname{ctg}\beta}{\sqrt{3}}$.

7. $S_{\text{бічн}} = \dfrac{1}{2} H \cdot \dfrac{4H \operatorname{ctg}\beta}{\sqrt{3}} + \dfrac{H}{\sin\beta} \cdot \dfrac{4H \operatorname{ctg}\beta}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3} H^2 \operatorname{ctg}\beta}{3}\left(1 + \dfrac{2}{\sin\beta}\right).$

Відповідь: $\dfrac{2\sqrt{3} H^2 \operatorname{ctg}\beta}{3}\left(1 + \dfrac{2}{\sin\beta}\right).$

Зауважимо, що геометрична конфігурація цієї задачі дозволяє отримати ще один корисний факт: ***якщо дві сусідні бічні грані піраміди однаково нахилені до її основи, то основа висоти піраміди лежить на бісектрисі кута між ребрами основи, які належать даним бічним граням.*** Обґрунтуйте цей факт самостійно.

Інший спосіб обчислень, який можна використати для розв'язання цієї задачі, буде описано в п. 4.3.

4.2. Піраміди, у яких основою висоти є центр кола, описаного навколо основи піраміди

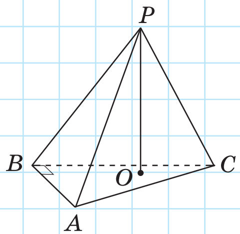
У п. 4.1 ми розглянули випадки, коли попередній аналіз умови задачі суттєво впливає на побудову рисунка та хід розв'язання. Розглянемо ще один такий приклад.

Задача

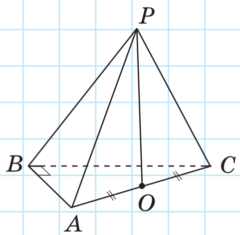
Основою піраміди є прямокутний трикутник з катетами 6 см і 8 см. Усі бічні ребра піраміди дорівнюють 13 см. Знайдіть висоту піраміди.

Розв'язання

Розпочинаючи розв'язування цієї задачі, можна побудувати зображення заданої піраміди $PABC$ з основою ABC ($\angle B = 90°$, $AB = 6$ см, $BC = 8$ см), бічними ребрами $PA = PB = PC = 13$ см і висотою $PO \perp (ABC)$ так, як показано на рис 38, *а*. Але чи відповідає така побудова умові задачі?



а



б

Рис. 38

Оскільки точка P рівновіддалена від вершин трикутника ABC, то основа перпендикуляра, проведеного з даної точки до площини ABC, є центром кола, описаного навколо основи піраміди. Отже, точка O — центр кола, описаного навколо трикутника ABC. Оскільки в прямокутному трикутнику центр описаного кола є серединою гіпотенузи, то точка O — середина відрізка AC. Таким чином, умові даної задачі відповідає рисунок 38, *б*. Завершимо тепер розв'язування задачі.

З трикутника ABC за теоремою Піфагора $AC = 10$ см, отже, $AO = OC = 5$ см.

З трикутника POA ($\angle O = 90°$, $PA = 13$ см, $AO = 5$ см) за теоремою Піфагора $PO = 12$ см.

Відповідь: 12 см.

Щойно наведені міркування можна узагальнити для довільної піраміди.

Опорна задача

(про піраміду з рівними бічними ребрами)

Якщо всі бічні ребра піраміди рівні, то основою її висоти є центр кола, описаного навколо основи піраміди. Доведіть.

Розв'язання

Для заданої піраміди $PA_1A_2...A_n$ з висотою PO (рис. 39) прямокутні трикутники POA_1, POA_2, ..., POA_n рівні за гіпотенузою і катетом. Звідси отримуємо: $OA_1 = OA_2 = ... = OA_n$, тобто точка O є центром кола, описаного навколо многокутника $A_1A_2...A_n$.

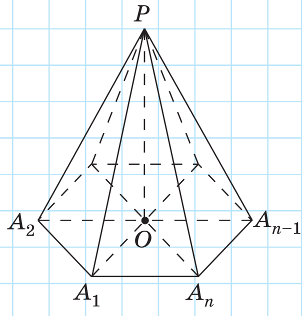


Рис. 39

Спираючись на інші ознаки рівності прямокутних трикутників, неважко отримати ще одне корисне узагальнення.

Якщо в піраміді виконується принаймні одна з умов:

1) усі бічні ребра рівні;

2) усі бічні ребра утворюють однакові кути з площиною основи піраміди;

3) усі бічні ребра утворюють однакові кути з висотою піраміди,

то основою висоти піраміди є центр кола, описаного навколо основи піраміди.

Наявність принаймні однієї з цих умов указує на те, що навколо основи даної піраміди можна описати коло, центр якого є основою її висоти. Більш того, має місце обернене твердження. Сформулюйте та доведіть це твердження самостійно.

Зауважимо також, що під час розв'язування багатьох задач про піраміди, які мають щойно описані властивості, окремо розглядають прямокутний трикутник на кшталт трикутника PA_1O (рис. 40). У ньому PO — висота піраміди, PA_1 — бічне ребро, A_1O — радіус кола, описаного навколо основи піраміди.

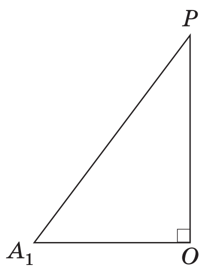


Рис. 40

4.3. Піраміди, у яких основою висоти є центр кола, вписаного в основу піраміди

Розглянемо ще одну задачу, важливим етапом розв'язування якої є визначення положення основи висоти піраміди.

Задача

Основою піраміди є ромб з діагоналями 10 см і 24 см. Усі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють 60°. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

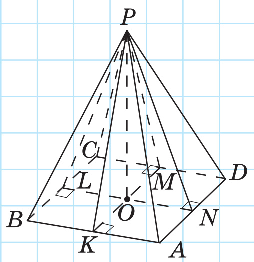
Розв'язання

Нехай дано піраміду $PABCD$, основа якої — ромб $ABCD$ ($BD = 24$ см, $AC = 10$ см), $PO \perp (ABC)$, PO — висота піраміди (рис. 41, *а*). Визначимо положення точки O в ромбі $ABCD$.

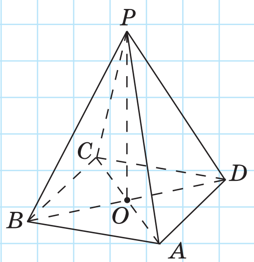
Проведемо з точки P перпендикуляри: $PK \perp AB$, $PL \perp BC$, $PM \perp CD$, $PN \perp AD$. Відрізки OK, OL, OM і ON — проекції похилих PK, PL, PM і PN на площину основи піраміди. Тоді за теоремою про три перпендикуляри $OK \perp AB$, $OL \perp BC$, $OM \perp CD$, $ON \perp AD$. Таким чином, кути PKO, PLO, PMO і PNO — лінійні кути двогранних кутів при основі піраміди; за умовою задачі $\angle PKO = \angle PLO = \angle PMO = \angle PNO = 60°$.

Прямокутні трикутники PKO, PLO, PMO і PNO рівні за катетом і протилежним кутом. Звідси випливає, що $OK = OL = OM = ON$. Оскільки за доведеним ці рівні відрізки перпендикулярні до сторін ромба $ABCD$, то точка O рівновіддалена від усіх прямих, що містять сторони ромба, отже, є центром кола, вписаного в ромб,— точкою перетину його діагоналей (рис. 41, *б*).

Трикутники AOB, BOC, COD і AOD — ортогональні проекції бічних граней піраміди APB, BPC, CPD і APD на площину основи. За теоремою про площу ортогональної проекції многокутника $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle APB} \cdot \cos 60°$, $S_{\triangle BOC} = S_{\triangle BPC} \cdot \cos 60°$, $S_{\triangle COD} = S_{\triangle CPD} \cdot \cos 60°$, $S_{\triangle AOD} = S_{\triangle APD} \cdot \cos 60°$.



а



б

Рис. 41

Додаючи ці рівності, отримуємо:

$S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC} + S_{\triangle COD} + S_{\triangle AOD} = \left(S_{\triangle APB} + S_{\triangle BPC} + S_{\triangle CPD} + S_{\triangle APD}\right) \cdot \cos 60°$, або

$S_{ABCD} = S_{\text{бічн}} \cdot \cos 60°$.

Звідси $S_{\text{бічн}} = \dfrac{S_{ABCD}}{\cos 60°}$.

Оскільки площа ромба дорівнює півдобутку його діагоналей, то $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2} \cdot 10 \cdot 24 = 120$ (см^2). Отже, $S_{\text{бічн}} = \dfrac{120}{\cos 60°} = 240$ (см^2).

Відповідь: 240 см^2.

Узагальнимо щойно наведені міркування.

Опорна задача
(про піраміду з рівними двогранними кутами при основі)

Якщо всі двогранні кути при основі піраміди рівні, то основою її висоти є центр кола, вписаного в основу піраміди. Доведіть.

Розв'язання

Для даної піраміди $PA_1A_2...A_n$ з висотою PO та висотами бічних граней PH_1, PH_2, ..., PH_n, проведеними з вершини, прямокутні трикутники POH_1, POH_2, ..., POH_n рівні за катетом і протилежним кутом (рис. 42). Звідси отримуємо: $OH_1 = OH_2 = ... = OH_n$. Але за теоремою про три перпендикуляри $OH_1 \perp A_1A_2$, $OH_2 \perp A_2A_3$, ..., $OH_n \perp A_1A_n$.

Отже, точка O є центром кола, вписаного в многокутник $A_1A_2...A_n$*.

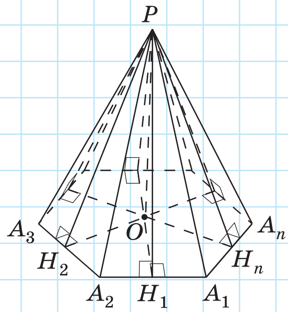


Рис. 42

Слід зауважити, що коли замість рівності двогранних кутів при основі розглядати рівність кутів нахилу площин бічних граней піраміди до площини основи, можлива геометрична ситуація, коли висота піраміди лежить поза пірамідою. Але розгляд цих випадків виходить за межі нашого курсу.

* Нагадаємо, що ми розглядаємо лише піраміди, основами яких є опуклі многокутники.

Ще одне важливе узагальнення розв'язаної задачі стосується способу обчислення площі бічної поверхні піраміди.

Опорна задача (про ортогональну проекцію бічних граней піраміди на площину основи)

Якщо всі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють β, то $S_{\text{бічн}}=\dfrac{S_{\text{осн}}}{\cos\beta}$. Доведіть.

Розв'язання

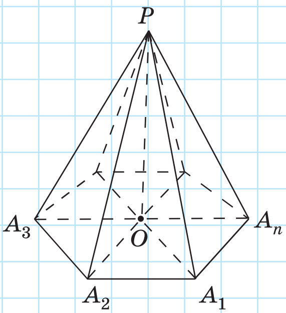


Рис. 43

Для даної піраміди $PA_1A_2...A_n$ з висотою PO трикутники OA_1A_2, OA_2A_3, ..., OA_nA_1 є ортогональними проекціями бічних граней PA_1A_2, PA_2A_3, ..., PA_nA_1 (рис. 43). Тоді за формулою площі ортогональної проекції многокутника маємо:

$$S_{\triangle OA_1A_2}+S_{\triangle OA_2A_3}+\ldots+S_{\triangle OA_nA_1}=S_{\triangle PA_1A_2}\cdot\cos\beta+$$
$$+S_{\triangle PA_2A_3}\cdot\cos\beta+\ldots+S_{\triangle PA_nA_1}\cdot\cos\beta.$$

Звідси: $S_{\text{осн}}=\left(S_{\triangle PA_1A_2}+S_{\triangle PA_2A_3}+\ldots+S_{\triangle PA_nA_1}\right)\cdot\cos\beta$.

Остаточно отримуємо: $S_{\text{осн}}=S_{\text{бічн}}\cdot\cos\beta$, або $S_{\text{бічн}}=\dfrac{S_{\text{осн}}}{\cos\beta}$.

Цю формулу зручно застосовувати, зокрема, *для обчислення площі бічної поверхні* правильної піраміди.

Аналогічно можна довести таке твердження.

Якщо основа піраміди складається з ортогональних проекцій декількох бічних граней, кожна з яких утворює з площиною основи двогранний кут β, то сума S площ цих граней обчислюється за формулою $S=\dfrac{S_{\text{осн}}}{\cos\beta}$.

Доведіть це твердження самостійно.

Даним фактом можна скористатися в задачі п. 4.1, де $S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PBC}=\dfrac{S_{\text{осн}}}{\cos\beta}$.

Звернемо увагу на те, що під час розв'язування багатьох задач про піраміди, які мають щойно описану властивість, окремо розглядають прямокутний трикутник на кшталт трикутника PH_1O (рис. 44). У ньому PO — висота піраміди, PH_1 — висота бічної грані, H_1O — радіус кола, вписаного в основу піраміди.

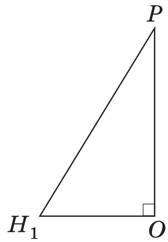


Рис. 44

Запитання і задачі

Обговорюємо теорію

147°. Чи можуть два бічних ребра піраміди бути перпендикулярними до площини основи? Чи можуть три бічні грані піраміди бути перпендикулярними до площини основи?

148. У піраміді $PABC$ (рис. 45, *а*, *б*) $PA = PB =$ $= PC$, PO — висота піраміди. Визначте вид трикутника ABC за величиною кутів.

149. Перекладіть англійською (або іншою іноземною мовою) власне розв'язання задачі 148. Порівняйте одержаний переклад з одержаним за допомогою електронного перекладача, наприклад, перекладача Google.

150. Чи може основа чотирикутної піраміди, всі ребра якої рівні, бути:

а) прямокутником;

б) ромбом з діагоналями 6 і 8;

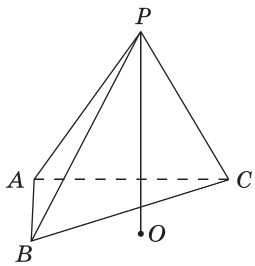
в) рівнобічною трапецією;

г) прямокутною трапецією?

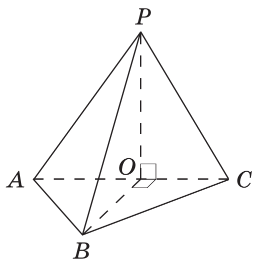
151. Усі бічні ребра піраміди рівні.

а) Чи може лише одна бічна грань даної піраміди бути перпендикулярною до площини основи?

б) Чи можуть дві бічні грані даної піраміди бути перпендикулярними до площини основи?



а



б

Рис. 45

152. У трикутній піраміді $PABC$ (рис. 46) двогранні кути при основі рівні, PO — висота піраміди. Порівняйте кути ABD і CBD.

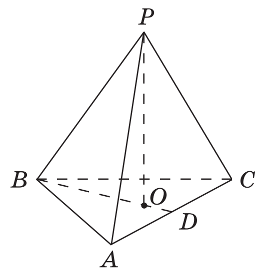


Рис. 46

153. Чи може основа чотирикутної піраміди, у якій усі двогранні кути при основі рівні, бути:

а) прямокутником зі сторонами 6 і 8;

б) ромбом;

в) рівнобічною трапецією з основами 6 і 10 та бічною стороною 9?

154. У піраміді всі бічні ребра рівні і всі двогранні кути при основі рівні. Чи може основою даної піраміди бути:

а) прямокутний трикутник;

б) тупокутний трикутник;

в) паралелограм із кутом 60°;

г) квадрат?

Моделюємо

155.• Нарисуйте на цупкому папері розгортку трикутної піраміди, основа якої — правильний трикутник, а дві бічні грані перпендикулярні до площини основи. Скільки граней піраміди є прямокутними трикутниками? Виріжте розгортку і склейте з неї модель піраміди.

156.• Виготовте з дроту модель трикутної піраміди, у якій всі плоскі кути при одній вершині прямі, а всі ребра, які виходять із цієї вершини, рівні. Розглядаючи різні грані піраміди як її основи, укажіть висоту піраміди в кожному випадку.

157. За допомогою програми DG або іншого графічного редактора з підтримкою 3D-моделювання змоделюйте розгортку піраміди, у якої рівно одна бічна грань перпендикулярна до площини основи. Проведіть відповідні обчислення і побудуйте цю розгортку на аркуші паперу.

Розв'язуємо задачі

Рівень А

158.° Основою піраміди $PABC$ є прямокутний трикутник ABC (рис. 47). Бічні грані піраміди, що містять катет AB і гіпотенузу AC, перпендикулярні до площини основи, а третя бічна грань нахилена до неї під кутом 45°.

а) Доведіть, що $\angle PBA = 45°$.

б) Знайдіть висоту піраміди, якщо $AC = 10$ см, $BC = 6$ см.

в) Знайдіть площу грані PBC.

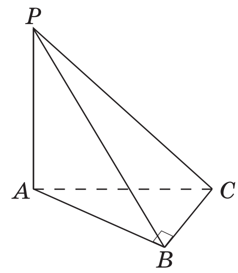


Рис. 47

159. Основою піраміди $PABC$ є рівнобедрений трикутник ABC (рис. 48). Бічна грань PAC, що містить основу трикутника, перпендикулярна до площини ABC, а дві інші бічні грані нахилені до площини основи під кутом 60°.

а) Обґрунтуйте лінійні кути двогранних кутів, що дорівнюють 60°.

б) Доведіть, що основа висоти піраміди — точка O — є серединою відрізка AC.

в) Знайдіть площу основи піраміди, якщо $PO = 4\sqrt{3}$ см, $AB = BC = 12$ см.

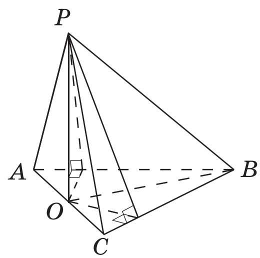


Рис. 48

160. Основою піраміди є квадрат зі стороною a. Дві бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи, а дві інші нахилені до неї під кутом β.

а) Доведіть, що дана піраміда має дві пари рівних бічних граней.

б) Доведіть, що сума площ бічних граней піраміди, не перпендикулярних до площини основи, дорівнює $\frac{a^2}{\cos\beta}$.

в) Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

161. Основою чотирикутної піраміди є ромб, а всі бічні ребра піраміди рівні. Доведіть, що дана піраміда є правильною.

162. Основою піраміди є прямокутник зі сторонами 12 см і 16 см. Усі бічні ребра піраміди дорівнюють 26 см. Знайдіть висоту піраміди.

163. Основа піраміди — прямокутний трикутник, один із кутів якого дорівнює 60°. Висота піраміди дорівнює 4 см. Усі бічні ребра нахилені до площини основи під кутом 45°. Знайдіть площу основи піраміди.

164. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник із бічною стороною a і кутом при основі α. Усі бічні ребра піраміди утворюють із її висотою кути γ. Знайдіть висоту піраміди.

165. Основа піраміди — прямокутний трикутник із катетом a і протилежним кутом α. Усі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом β. Знайдіть висоту піраміди.

166. Основою чотирикутної піраміди є паралелограм, а всі двогранні кути при основі піраміди рівні. Доведіть, що основа даної піраміди — ромб.

167. Основою піраміди є трикутник зі сторонами 4 см, 13 см і 15 см. Усі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють 60°. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

168. Основою піраміди є ромб зі стороною 6 см і кутом 60°. Усі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють 30°. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

169. Усі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють 60°. Знайдіть:

а) площу бічної поверхні піраміди, якщо площа її основи дорівнює 24 $см^2$;

б) площу повної поверхні піраміди, якщо площа її бічної поверхні дорівнює 24 $см^2$.

170. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, основа якої — прямокутний трикутник із катетами a і b, а всі двогранні кути при основі дорівнюють α.

Рівень Б

171. В основі піраміди лежить ромб зі стороною 6 см і кутом 120°. Дві бічні грані, що містять сторони даного кута, перпендикулярні до площини основи, а дві інші нахилені до неї під кутом 30°. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

172. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник із кутом при вершині α і радіусом описаного кола R. Бічні грані піраміди, що містять сторони даного кута, перпендикулярні до площини основи, а третя грань нахилена до неї під кутом β. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

173. Основа піраміди — прямокутний трикутник із катетом a і прилеглим гострим кутом α. Бічна грань піраміди, яка містить другий катет, перпендикулярна до площини основи, а дві інші грані нахилені до основи під кутом β.

а) Обґрунтуйте лінійні кути двогранних кутів, що дорівнюють β.

б) Доведіть, що основа висоти піраміди належить бісектрисі кута α.

в) Знайдіть висоту піраміди.

174. Основа піраміди — правильний трикутник зі стороною a. Дві бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи, а третя нахилена до неї під кутом β. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

175. Основа піраміди — рівнобічна трапеція з меншою основою 7 см і гострим кутом $60°$. Діагональ даної трапеції є бісектрисою її гострого кута. Усі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом $60°$. Визначте положення основи висоти піраміди і знайдіть довжини її бічних ребер.

176. В основі піраміди лежить трикутник із кутами α і β, а всі бічні ребра піраміди рівні. Перпендикуляр, проведений з основи висоти піраміди до бічного ребра, дорівнює m і утворює з висотою кут γ. Знайдіть площу основи піраміди.

177. Усі двогранні кути при основі трикутної піраміди дорівнюють β. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, якщо її основа — прямокутний трикутник із гіпотенузою c і гострим кутом α.

178. Основою піраміди є трикутник, дві сторони якого дорівнюють b і утворюють кут α. Усі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють β. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

179. Основа піраміди — рівнобічна трапеція з гострим кутом α. Усі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють β. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, якщо її висота дорівнює H.

180. Основою піраміди є ромб із тупим кутом α. Усі висоти бічних граней, проведені з вершини піраміди, дорівнюють l і утворюють із висотою піраміди кути β. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

Рівень В

181. Основа піраміди — рівнобедрений трикутник з основою a і кутом при вершині α. Бічна грань, що містить основу трикутника, перпендикулярна до площини основи, а дві інші грані нахилені до основи під кутом β. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

182. Основою піраміди є прямокутний трикутник із катетами 21 см і 28 см. Бічна грань піраміди, що містить гіпотенузу трикутника, перпендикулярна до площини основи, а дві інші грані нахилені до основи під кутом $60°$. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

183. Основою піраміди є прямокутник. Одна з бічних граней перпендикулярна до площини основи, а радіус кола, вписаного в цю грань, дорівнює r. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, якщо решта її бічних граней нахилені до площини основи під кутом β.

184. Основа піраміди — ромб із гострим кутом α. Дві грані піраміди, що містять сторони даного кута, перпендикулярні до площини основи, а дві інші грані нахилені до неї під кутом β. Точка висоти піраміди, що знаходиться на відстані m від вершини піраміди, рівновіддалена від площини основи й площин похилих бічних граней. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

185. Основою піраміди є прямокутна трапеція з більшою діагоналлю d. Дві бічні грані, які містять сторони гострого кута трапеції, перпендикулярні до площини основи, а дві інші грані нахилені до неї під кутом β. Знайдіть висоту піраміди.

186. В основі піраміди, всі бічні ребра якої рівні, лежить прямокутний трикутник із гострим кутом α і радіусом вписаного кола r. Відрізок, що сполучає середину висоти піраміди з вершиною основи, нахилений до площини основи під кутом β. Знайдіть висоту піраміди.

187. Основою піраміди є рівнобічна трапеція з гострим кутом α. Усі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють β, а основа висоти піраміди віддалена від бічної грані на відстань d. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

188. Основа піраміди — ромб із тупим кутом α, а всі двогранні кути при основі дорівнюють β. Точка висоти піраміди, що знаходиться на відстані a від площини основи, рівновіддалена від вершини піраміди й сторони основи. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

Повторення перед вивченням § 5

Теоретичний матеріал

- аксіома перетину площин; 10 клас, § 1
- паралельність прямої і площини; 10 клас, § 4
- паралельність площин; 10 клас, § 5
- побудова перерізів многогранників методом слідів і проекцій. 10 клас, § 2, 6

Задачі

189. Пряма a належить площині α. Площина β, паралельна прямій a, перетинає площину α по прямій c. Доведіть, що $c \parallel a$.

190. Точка M — середина ребра AA_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Побудуйте точку перетину площини ABC:

а) з прямою B_1M;
б) з прямою C_1M.

§5 Перерізи многогранників. Зрізана піраміда

5.1. Січна площина і переріз. Перерізи призми

Перерізи деяких многогранників вже були розглянуті в 10 класі. Надамо уявленням про перерізи геометричних тіл певної математичної строгості.

Нехай у просторі дано тіло й деяку площину. Якщо принаймні дві точки тіла лежать по різні боки від заданої площини, то кажуть, що площина перетинає тіло. У такому випадку вона є січною площиною заданого тіла. Наприклад, на рис. 49 площина α є січною площиною тіла F.

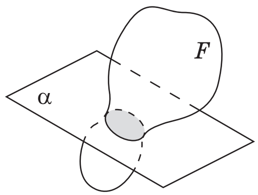


Рис. 49. Переріз тіла площиною

Означення

Перерізом геометричного тіла площиною називається фігура, яка складається з усіх спільних точок тіла й січної площини.

На рис. 49 зафарбована фігура є перерізом тіла F площиною α.

Якщо задане тіло — многогранник, то січна площина перетинає його грані по відрізках. Ці відрізки обмежують плоский многокутник, який є спільною частиною даного многогранника й січної площини. Коротко кажуть, що ***перерізом многогранника є многокутник*** (маючи на увазі відповідний плоский многокутник).

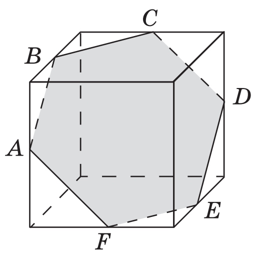


Рис. 50. Переріз куба

Очевидно, що коли многогранник має n граней, то кількість сторін многокутника, який є перерізом цього многогранника, не перевищує n. Наприклад, перерізом паралелепіпеда (який має 6 граней) може бути лише трикутник, чотирикутник, п'ятикутник або шестикутник. На рис. 50 перерізом куба є шестикутник $ABCDEF$.

Для побудови перерізу многогранника достатньо побудувати всі точки перетину січної площини з ребрами даного многогранника, після чого сполучити відрізками кожні дві побудовані точки, які належать одній грані. Нагадаємо, що коли січна площина перетинає площини двох паралельних граней, то прямі перетину паралельні. Зокрема, на рис. 50 $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$, $CD \parallel AF$.

Часто задачі на обчислення площ перерізів поєднують у собі особливості обчислювальних задач і задач на побудову: справді, у розв'язаннях таких задач необхідно не лише обчислити площу деякого перерізу, але й описати його побудову та обґрунтувати, що отриманий переріз шуканий.

Задача

У правильній чотирикутній призмі через діагональ однієї основи та протилежну до неї вершину іншої основи проведено переріз площею Q. Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо зазначений переріз утворює з площиною основи кут α.

Розв'язання

Нехай задано правильну чотирикутну призму $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 51). Розглянемо переріз, який проходить через діагональ основи AC та вершину D_1. Оскільки точки C і D_1 належать грані CC_1D_1D, то CD_1 — пряма перетину січної площини з площиною цієї грані. Аналогічно отримуємо, що прямі AC і AD_1 є прямими перетину січної площини з площинами $ABCD$ і AA_1D_1D. Отже, трикутник ACD_1 є шуканим перерізом.

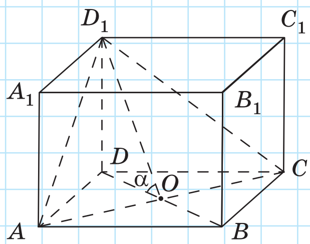


Рис. 51

За умовою $S_{\triangle ACD_1} = Q$. Нехай O — точка перетину AC і BD. Оскільки $DO \perp AC$ і $D_1D \perp (ABC)$, то $D_1O \perp AC$ за теоремою про три перпендикуляри. Отже, кут D_1OD є кутом між площинами ACD_1 та $ABCD$. За умовою $\angle D_1OD = \alpha$. Нехай ребро основи дорівнює a. Оскільки $ABCD$ — квадрат, $P_{\text{осн}} = 4a$. З прямокутного трикутника D_1DO ($\angle D = 90^\circ$, $DO = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $\angle D_1OD = \alpha$) маємо: $DD_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}\operatorname{tg}\alpha$. Звідси $S_{\text{бічн}} = P_{\text{осн}} \cdot h = \frac{4a^2}{\sqrt{2}}\operatorname{tg}\alpha$.

За формулою площі ортогональної проекції многокутника $S_{\triangle ADC} = Q\cos\alpha$, звідки $S_{ABCD} = 2Q\cos\alpha = a^2$. Отже, $a = \sqrt{2Q\cos\alpha}$. Остаточно отримуємо:

$$S_{\text{бічн}} = \frac{4 \cdot 2Q\cos\alpha}{\sqrt{2}}\operatorname{tg}\alpha = 4\sqrt{2}Q\sin\alpha.$$

Відповідь: $4\sqrt{2}Q\sin\alpha$.

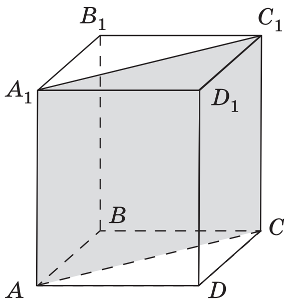
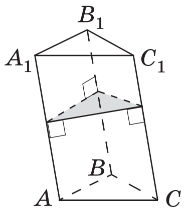
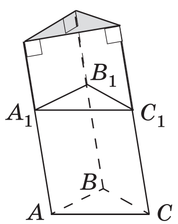


Рис. 52. Діагональний переріз призми



а



б

Рис. 53. Перпендикулярний переріз похилої призми

Розглянемо докладніше найпростіші перерізи призм.

Будь-який переріз призми площиною, паралельною бічному ребру, є паралелограмом. Зокрема, паралелограмом є ***діагональний переріз призми*** — переріз площиною, яка проходить через бічне ребро й діагональ основи. На рис. 52 паралелограм AA_1C_1C — діагональний переріз паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Очевидно, що діагональним перерізом прямої призми є прямокутник.

При вивченні похилих призм особливу роль відіграє переріз призми площиною, яка перетинає всі бічні ребра і перпендикулярна до них (рис. 53, *а*). Але є похилі призми, в яких такого перерізу може не існувати. Тому будемо вважати ***перпендикулярним перерізом*** призми многокутник, вершинами якого є точки перетину площини, перпендикулярної до бічних ребер призми, з прямими, які містять ці ребра (рис. 53, *а*, *б*).

Теорема (формула площі бічної поверхні похилої призми)

Площа бічної поверхні похилої призми дорівнює добутку периметра перпендикулярного перерізу на бічне ребро:

$$S_{\text{бічн}} = P_{\perp} \cdot l.$$

Доведення

□ Нехай перпендикулярний переріз похилої n-кутної призми — n-кутник, сторони якого дорівнюють $h_1, h_2, \ldots, h_n$. Візьмемо за основи паралелограмів, що є бічними гранями призми, бічні ребра завдовжки l. Очевидно, що відповідні сторони перпендикулярного перерізу будуть висотами цих паралелограмів. Отже,

$$S_{\text{бічн}} = h_1 l + h_2 l + \ldots + h_n l = \left(h_1 + h_2 + \ldots + h_n\right) l = P_{\perp} \cdot l .$$

Теорему доведено. ■

5.2. Перерізи піраміди. Зрізана піраміда

Розглянемо найпростіші перерізи пірамід.

Будь-який переріз піраміди площиною, яка проходить через її вершину, є трикутником. Зокрема, трикутником є ***діагональний переріз піраміди*** — переріз площиною, яка проходить через вершину піраміди й діагональ її основи. На рис. 54 трикутник PBD — діагональний переріз піраміди $PABCD$. Важливим випадком перерізу піраміди є переріз, паралельний площині основи.

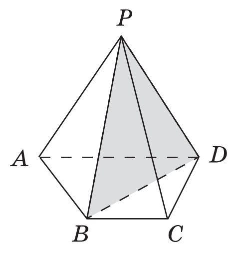


Рис. 54. Діагональний переріз піраміди

Теорема (про переріз піраміди, паралельний площині її основи)

Площина, яка паралельна основі заданої піраміди і перетинає її бічні ребра, відтинає від заданої меншу піраміду. При цьому відповідні грані цих пірамід є подібними многокутниками, а коефіцієнт подібності дорівнює відношенню висот цих пірамід.

Доведення

□ Нехай задано, наприклад, трикутну піраміду $PABC$ (рис. 55). Через точку A_1, що належить бічному ребру PA заданої піраміди, проведено січну площину α, паралельну площині основи піраміди. Оскільки точки A і P лежать по

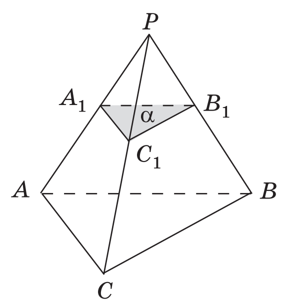


Рис. 55

різні боки від площини α, а точки A, B і C — по один бік від неї, робимо висновок, що площина α перетинає ребра PB і PC піраміди $PABC$. Нехай точками перетину є точки B_1 і C_1 відповідно. Отже, площина α відтинає від піраміди $PABC$ меншу піраміду $PA_1B_1C_1$, основою якої є трикутник $A_1B_1C_1$.

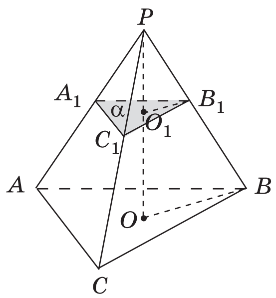


Рис. 56

Розглянемо трикутники APB і A_1PB_1. У них кут P спільний, а $\angle PAB = \angle PA_1B_1$, оскільки $AB \parallel A_1B_1$. Отже, трикутники APB і A_1PB_1 подібні, тому $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1P}{AP} = \frac{B_1P}{BP} = k$. Аналогічно доведемо подібність трикутників APC і A_1PC_1, а також трикутників BPC і B_1PC_1. Очевидно, що розглянуті три пари трикутників подібні з коефіцієнтом k, тому $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC}$, тобто $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$ з тим самим коефіцієнтом k за трьома пропорційними сторонами.

Проведемо висоту PO піраміди $PABC$. Нехай вона перетинає площину α в точці O_1 (рис. 56). Розглянемо в площині POB прямокутні трикутники POB і PO_1B_1. У них кут P спільний, тому ці трикутники подібні за гострим кутом, отже,

$$\frac{PO_1}{PO} = \frac{PB_1}{PB} = k.$$

Ми отримали, що коефіцієнт подібності відповідних бічних граней та основ розглядуваних пірамід дорівнює відношенню їх висот.

Теорему доведено. ■

Розглянемо тепер другу частину піраміди, яку відтинає площина перерізу, паралельна основі. Ця частина являє собою многогранник, який називають ***зрізаною пірамідою***. Дві її грані (***основи зрізаної піраміди***) — подібні многокутники, що лежать у паралельних площинах, а решта граней (***бічні грані зрізаної піраміди***) — трапеції.

На рис. 57 зображено зрізану трикутну піраміду $ABCA_1B_1C_1$ з основами ABC і $A_1B_1C_1$ та бічними гранями AA_1B_1B, BB_1C_1C і CC_1A_1A. Відрізки AA_1, BB_1 і CC_1, що сполучають відповідні вершини основ, є ***бічними ребрами зрізаної піраміди***.

Висотою зрізаної піраміди називається перпендикуляр, проведений із будь-якої точки однієї основи до площини іншої основи. Наприклад, на рис. 57 висотою зрізаної піраміди є відрізок A_1O.

Зображення зрізаної піраміди зазвичай будують у такий спосіб. Спочатку зображають відповідну повну піраміду, а потім будують її переріз площиною, паралельною площині основи.

Якщо січна площина правильної піраміди паралельна основі, то в результаті перетину утворюється ***правильна зрізана піраміда***. Основами такої піраміди є правильні подібні многокутники, а відрізок, що сполучає центри цих многокутників, є висотою піраміди. Очевидно, що бічні ребра правильної зрізаної піраміди рівні, отже, її бічні грані є рівнобічними трапеціями. Висоти цих трапецій називають ***апофемами правильної зрізаної піраміди***. Наприклад, на рис. 58 зображено правильну чотирикутну зрізану піраміду $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з висотою OO_1 і апофемою A_1M.

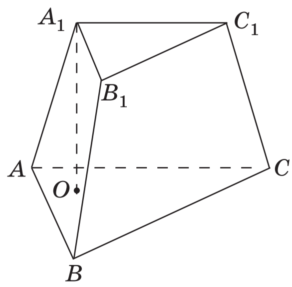


Рис. 57. Зрізана трикутна піраміда

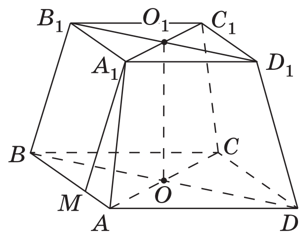


Рис. 58. Правильна чотирикутна зрізана піраміда

Теорема (формула площі бічної поверхні правильної зрізаної піраміди)

Площа бічної поверхні правильної зрізаної піраміди дорівнює добутку півсуми периметрів її основ на апофему:

$$S_{\text{бічн}} = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot l.$$

Доведення

□ Нехай сторони основ правильної n-кутної зрізаної піраміди з апофемою l дорівнюють a_1 і a_2. Тоді кожна її бічна грань —

рівнобічна трапеція з основами a_1 і a_2 та висотою l. Тому площа однієї грані дорівнює $\frac{a_1+a_2}{2}\cdot l$.

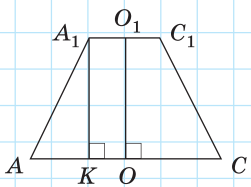
Звідси $S_{\text{бічн}}=n\cdot\frac{a_1+a_2}{2}\cdot l=\frac{na_1+na_2}{2}\cdot l$, де n — кількість вершин основи піраміди.

Оскільки добутки na_1 і na_2 дорівнюють периметрам P_1 і P_2 основ піраміди, то $S_{\text{бічн}}=\frac{P_1+P_2}{2}\cdot l$. Теорему доведено. ■

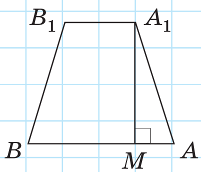
Задача

Знайдіть площу бічної поверхні правильної чотирикутної зрізаної піраміди, якщо її діагональний переріз — трапеція з основами $2\sqrt{2}$ см і $8\sqrt{2}$ см та висотою $\sqrt{7}$ см.

Розв'язання



а



б

Рис. 59

Нехай трапеція AA_1C_1C (рис. 59, *а*) — діагональний переріз правильної чотирикутної зрізаної піраміди $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (див. рис. 58), $A_1C_1=2\sqrt{2}$ см, $AC=8\sqrt{2}$ см, A_1K — висота трапеції, $A_1K=\sqrt{7}$ см.

Оскільки дана піраміда правильна, то трапеція AA_1C_1C рівнобічна; отже, $AK=(AC-A_1C_1):2$ (обґрунтуйте це самостійно), $AK=3\sqrt{2}$ см. Тоді з трикутника AA_1K ($\angle K=90^\circ$) за теоремою Піфагора $AA_1=\sqrt{\left(3\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{7}\right)^2}=5$ (см). Розглянемо тепер бічну грань піраміди — рівнобічну трапецію BB_1A_1A (рис. 59, *б*). Оскільки основи цієї піраміди — квадрати з діагоналями $2\sqrt{2}$ см і $8\sqrt{2}$ см, то $AB=8$ см, $A_1B_1=2$ см — сторони основ піраміди. Тоді якщо A_1M — апофема даної піраміди, то $AM=(AB-A_1B_1):2$, $AM=3$ см. Із трикутника AA_1M ($\angle M=90^\circ$) за теоремою Піфагора $A_1M=4$ см.

Отже, $S_{\text{бічн}}=\frac{4\cdot 2+4\cdot 8}{2}\cdot 4=80$ (см^2).

Відповідь: 80 см^2.

Узагалі, для проведення обчислень під час розв'язування задач про зрізані піраміди іноді зручно розглядати такі фрагменти їхніх перерізів:

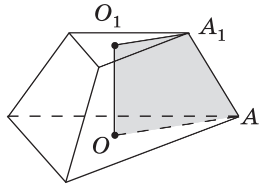
- фрагмент перерізу, що проходить через бічне ребро й центри кіл, описаних навколо основ,— у випадку, коли бічні ребра піраміди є рівними (рис. 60, *а*, *б*):

OO_1 — висота піраміди,
OA і O_1A_1 — радіуси кіл, описаних навколо основ,
AA_1 — бічне ребро,
$\angle A_1AO$ — кут нахилу бічного ребра до площини більшої основи;

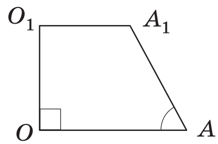
- фрагмент перерізу, що проходить через центри кіл, вписаних в основи, перпендикулярно до ребра основи,— у випадку, коли бічні грані нахилені до основи під рівними кутами (рис. 60, *в*, *г*):

OO_1 — висота піраміди,
OD і O_1D_1 — радіуси кіл, вписаних в основи,
DD_1 — висота бічної грані,
$\angle D_1DO$ — лінійний кут двогранного кута при більшій основі.

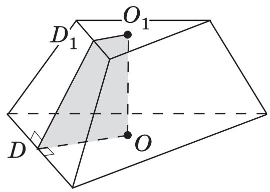
Зауважимо також, що під час розв'язування окремих задач доцільно добудовувати задану зрізану піраміду до повної.



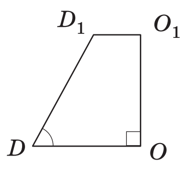
а



б



в



г

Рис. 60. Фрагменти перерізів зрізаної піраміди

Запитання і задачі

Обговорюємо теорію

191.° Чи може переріз тетраедра бути трикутником; чотирикутником; п'ятикутником?

192.° Чотирикутник AA_1C_1C — діагональний переріз прямої чотирикутної призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Визначте вид цього чотирикутника.

193. Перекладіть англійською (або іншою іноземною мовою) терміни «переріз піраміди», «зрізана піраміда», «апофема правильної зрізаної піраміди».

194. Чи може діагональний переріз правильної чотирикутної піраміди бути:

а) рівностороннім трикутником;
б) прямокутним трикутником;
в) трикутником зі сторонами 3, 4 і 5?

195. Через середину висоти піраміди проведено переріз, паралельний площині основи. У скільки разів площа перерізу менша за площу основи?

196. Основа піраміди — правильний многокутник. Чи обов'язково переріз, паралельний основі, відтинає від цієї піраміди правильну зрізану піраміду?

197. Чи є зрізана піраміда окремим випадком піраміди? Відповідь обґрунтуйте.

Моделюємо

198.• Виготовте з дроту модель куба. За допомогою нитки змоделюйте переріз куба, який має форму трикутника; чотирикутника; п'ятикутника; шестикутника.

199.• Виготовте модель трикутної піраміди. Розріжте модель так, щоб площина перерізу була паралельна площині основи піраміди. Опишіть елементи отриманої зрізаної піраміди.

200. За допомогою програми Geogebra або іншого графічного редактора з підтримкою 3D-моделювання дослідіть властивості правильної чотирикутної зрізаної піраміди. Змоделюйте кілька перерізів цієї зрізаної піраміди.

Розв'язуємо задачі

Рівень А

201. Основа прямої призми — рівнобедрений трикутник із бічною стороною 13 см і основою 24 см. Висота призми дорівнює 10 см. Знайдіть площу перерізу, проведеного через бічне ребро і бісектрису кута між бічними сторонами основи.

202. Діагональний переріз правильної чотирикутної призми — квадрат із площею 32 см^2. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

203. Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 9 см і 12 см. Знайдіть площу діагонального перерізу паралелепіпеда, якщо його діагональ утворює з площиною основи кут 45°.

204. Сторона основи правильної трикутної призми дорівнює 6 см, а бічне ребро 3 см. Знайдіть площу перерізу, проведеного через вершину верхньої основи і протилежну сторону нижньої основи.

205. У правильній чотирикутній призмі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площа перерізу BC_1D дорівнює 15 см^2, а площа основи — 18 см^2. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

206. Бічне ребро похилої призми дорівнює 10 см. Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо її перпендикулярний переріз — прямокутний трикутник із катетами 8 см і 15 см.

207. Перпендикулярний переріз похилої призми — трикутник зі сторонами 5 см і 16 см та кутом між ними 120°. Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо її бічне ребро дорівнює найбільшій стороні перерізу.

208. У правильній чотирикутній піраміді $PABCD$ точки K, M і N — середини ребер AB, CD і PB відповідно.

а) Побудуйте переріз піраміди площиною KMN. Визначте вид перерізу.

б) Знайдіть площу побудованого перерізу, якщо відстань від точки N до прямої KM дорівнює 5 см, а сторона основи піраміди 8 см.

209. Усі ребра тетраедра $PABC$ дорівнюють 6 см. Знайдіть площу перерізу, проведеного через ребро BC і середину ребра PA.

210. Бічне ребро правильної трикутної піраміди дорівнює b і нахилене до площини основи під кутом α. Знайдіть площу перерізу, проведеного через бічне ребро і висоту піраміди.

211. Зобразіть правильну чотирикутну зрізану піраміду. Обґрунтуйте:

а) кут нахилу бічного ребра до площини основи;

б) лінійний кут двогранного кута при більшій основі піраміди.

212. Висота правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнює 4 см, а сторони основ — 2 см і 8 см. Знайдіть бічне ребро й апофему піраміди.

213. Сторони основ правильної трикутної зрізаної піраміди дорівнюють $4\sqrt{3}$ см і $6\sqrt{3}$ см. Знайдіть бічне ребро піраміди, якщо воно нахилене до площини більшої основи під кутом $60°$.

214. Знайдіть площу повної поверхні правильної чотирикутної зрізаної піраміди зі сторонами основ 4 см і 10 см та апофемою 5 см.

215. Ковпак ковальського горна має форму правильної чотирикутної зрізаної піраміди (без основ) зі сторонами основ 20 см і 80 см та висотою 40 см. Скільки квадратних дециметрів жерсті необхідно для виготовлення ковпака, якщо на шви та відходи йде 20 % матеріалу?

216. Знайдіть площу бічної поверхні правильної трикутної зрізаної піраміди зі сторонами основ 4 см і 14 см та бічним ребром 13 см.

Рівень Б

217. Через сторону основи та середину бічного ребра правильної трикутної призми проведено переріз, який утворює з площиною основи кут α. Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо її висота дорівнює H.

218. Основа прямої призми — паралелограм зі сторонами 7 см і 9 см та діагоналлю 8 см. Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо площа її найбільшого діагонального перерізу дорівнює 56 см^2.

219. Доведіть, що сума квадратів площ діагональних перерізів прямого паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів площ усіх його бічних граней.

220. Дві бічні грані похилої трикутної призми взаємно перпендикулярні. Їхнє спільне бічне ребро дорівнює 10 см і віддалене від інших бічних ребер на 7 см і 24 см. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

221. Відстані між бічними ребрами похилої трикутної призми дорівнюють 10 см, 35 см і 39 см, а бічне ребро призми дорівнює діаметру кола, вписаного в перпендикулярний переріз. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

222. У правильній чотирикутній піраміді через діагональ основи проведено переріз, паралельний мимобіжному бічному ребру. Знайдіть площу перерізу, якщо сторона основи піраміди дорівнює 8 см, а висота 7 см.

223. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює a, а двогранний кут при основі β. Знайдіть площу перерізу, який проходить через середини двох сторін основи паралельно бічній грані, що містить третю сторону.

224. Висота піраміди дорівнює $8\sqrt{2}$ м. На якій відстані від вершини піраміди проходить переріз, паралельний основі, площа якого дорівнює половині площі основи піраміди?

225. Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди нахилене до площини основи під кутом α. Відрізок, що сполучає основу висоти піраміди із серединою бічного ребра, дорівнює m. Знайдіть площу перерізу, паралельного основі, який ділить висоту піраміди у відношенні 3 : 4, починаючи від вершини.

226. Знайдіть площу бічної поверхні правильної чотирикутної зрізаної піраміди, якщо площа її діагонального перерізу дорівнює $20\sqrt{2}$ см^2, висота — 4 см, а бічне ребро — $\sqrt{34}$ см.

227. Сторони основ правильної трикутної зрізаної піраміди дорівнюють a і b $(a<b)$. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, якщо двогранний кут при її більшій основі дорівнює α.

Рівень В

228. Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, що проходить через середини ребер A_1B_1, AD і CC_1. Визначте вид побудованого перерізу і знайдіть його площу, якщо ребро куба дорівнює a.

229. Площі діагональних перерізів прямого паралелепіпеда, основою якого є ромб, дорівнюють 42 см^2 і 56 см^2. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.

230. Знайдіть площі діагональних перерізів правильної шестикутної піраміди зі стороною основи a і двогранним кутом при основі $45°$.

231. Бічна грань і діагональний переріз правильної чотирикутної піраміди рівновеликі. Знайдіть двогранний кут при основі піраміди.

232. Сторона основи й бічне ребро правильної трикутної піраміди дорівнюють 15 см і 14 см відповідно. Знайдіть площу перерізу, який проходить через середину медіани основи перпендикулярно до цієї медіани.

233. Дві бічні грані піраміди, основою якої є квадрат, перпендикулярні до площини основи. Площі діагональних перерізів піраміди дорівнюють 48 см^2 і 80 см^2. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

234. Знайдіть площі двох перерізів піраміди, паралельних основі, якщо дані перерізи ділять бічне ребро на три рівні частини, а різниця їх площ становить 12 см^2.

235. Площа основи піраміди дорівнює 108 см^2. Знайдіть висоту піраміди, якщо відстань між двома перерізами, паралельними основі, дорівнює 8 см, а площі даних перерізів — 12 см^2 і 27 см^2.

236. Площі основ правильної трикутної зрізаної піраміди дорівнюють $9\sqrt{3}$ см^2 і $36\sqrt{3}$ см^2. Відстань від вершини меншої основи до протилежної сторони більшої основи дорівнює 7 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

237. Площі основ і діагонального перерізу правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнюють 16 см^2, 324 см^2 і 88 см^2 відповідно. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

Повторення перед вивченням § 6

Теоретичний матеріал

- правильні многокутники; 9 клас, § 18
- многогранні кути; 11 клас, § 1
- симетрія в просторі. 10 клас, § 15

Задачі

238. Плоский кут при вершині правильної n-кутної піраміди дорівнює $60°$. Чи може значення n бути більшим за 5?

239. Знайдіть площу рівностороннього трикутника, в якому різниця радіусів описаного і вписаного кіл становить $\sqrt{3}$ см.

§6 Правильні многогранники

6.1. Види правильних многогранників

Як відомо, в планіметрії для будь-якого натурального числа n, не меншого від 3, існує правильний n-кутник — многокутник, у якому всі сторони рівні й усі кути рівні. Просторовими аналогами правильних многокутників є правильні многогранники.

Означення

Правильним многогранником називається опуклий многогранник, у якому всі грані є рівними правильними многокутниками і в кожній вершині сходиться одна й та сама кількість ребер.

Прикладом правильного многогранника є куб: усі його грані — рівні квадрати, а в кожній вершині сходиться по три ребра.

З поданого означення випливає, що всі ребра правильного многогранника рівні. Можна довести також, що всі двогранні кути правильного многогранника, що містять дві грані зі спільним ребром, рівні.

Із глибокої давнини людству відомі п'ять видів правильних многогранників, причому доведено, що інших видів правильних многогранників не існує. Перш ніж розглянути кожний із правильних многогранників окремо, обґрунтуємо, що ***гранями правильного многогранника можуть бути лише трикутники, чотирикутники або п'ятикутники***. Справді, при $n \geqslant 6$ кут правильного n-кутника не менший за $120°$ (переконайтеся в цьому самостійно). Оскільки будь-який многогранний кут правильного многогранника має не менше ніж три грані, то за умови $n \geqslant 6$ сума плоских кутів многогранного кута буде не меншою за $120° \cdot 3 = 360°$, що суперечить доведеній властивості суми плоских кутів опуклого многогранного кута.

Назви правильних многогранників походять із грецької: **тетраедр** — чотиригранник, **гексаедр** — шестигранник, **октаедр** — восьмигранник, **додекаедр** — дванадцятигранник, **ікосаедр** — двадцятигранник.

Перейдемо до розгляду кожного з п'яти видів правильних многогранників.

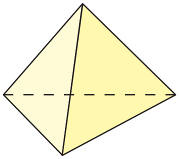


Рис. 61. Правильний тетраедр

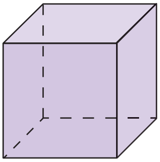


Рис. 62. Куб (правильний гексаедр)

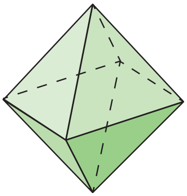


Рис. 63. Правильний октаедр

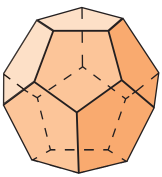


Рис. 64. Правильний додекаедр

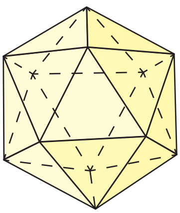


Рис. 65. Правильний ікосаедр

Правильний тетраедр — це многогранник, поверхня якого складається з чотирьох рівносторонніх трикутників (рис. 61). У кожній вершині правильного тетраедра сходиться по три ребра. Зазначимо, що правильний тетраедр є правильною трикутною пірамідою, в якій бічні ребра дорівнюють ребрам основи.

Куб (правильний гексаедр) є шестигранником, поверхня якого складається із шести квадратів (рис. 62). У кожній вершині куба сходиться по три ребра. Нагадаємо, що куб є правильною чотирикутною призмою, в якій бічні ребра дорівнюють ребрам основи.

Правильний октаедр — восьмигранник, гранями якого є рівносторонні трикутники (рис. 63). На відміну від правильного тетраедра, в кожній вершині правильного октаедра сходиться по чотири ребра.

Правильний додекаедр — многогранник, поверхня якого складається з дванадцяти правильних п'ятикутників (рис. 64). Кожна вершина правильного додекаедра є вершиною трьох правильних п'ятикутників, тобто з неї виходить по три ребра.

Правильний ікосаедр — многогранник, поверхня якого складається з двадцяти рівносторонніх трикутників (рис. 65). Кожна вершина правильного ікосаедра є вершиною п'яти правильних трикутників, тобто в ній сходиться по п'ять ребер.

Розглянемо елементи симетрії деяких правильних многогранників.

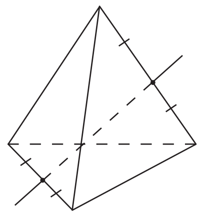
Правильний тетраедр не має центра симетрії. Віссю симетрії цього многогранника є пряма, яка проходить через середини двох мимобіжних ребер (рис. 66, *а*). Отже, правильний тетраедр має три осі симетрії. Площина симетрії правильного тетраедра проходить через його ребро перпендикулярно до мимобіжного ребра (рис. 66, *б*). Отже, правильний тетраедр має шість площин симетрії.

Куб має один центр симетрії — точку перетину діагоналей. Осями його симетрії є прямі, що проходять через центри двох протилежних граней (таких прямих три), і прямі, що проходять через середини двох паралельних ребер, які не належать одній грані (таких прямих шість). Таким чином, куб має дев'ять осей симетрії, кожна з яких проходить через його центр симетрії (рис. 67, *а*).

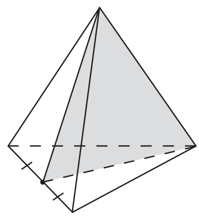
Площинами симетрії куба є три площини, кожна з яких проходить через середини чотирьох паралельних ребер, і шість площин, які проходять через пару паралельних ребер, що не належать одній грані. Отже, куб має дев'ять площин симетрії (рис. 67, *б*).

Решта правильних многогранників мають центр симетрії і кілька осей і площин симетрії (спробуйте визначити їх кількість самостійно).

Властивості правильних многогранників здавна приваблюють учених, архітекторів, ювелірів і взагалі багатьох людей, які цікавляться навколишнім світом. Великий давньогрецький філософ Платон пов'язував із правильними многогранниками чотири природні стихії: з правильним тетраедром — Вогонь, із кубом — Землю, з правильним октаедром — Повітря, з правильним додекаедром — Воду. Платон припускав, що існує ще одна, п'ята стихія, пов'язана з правильним ікосаедром,— Божественний ефір. І хоча ідея про існування п'ятої стихії була зрештою спростована наукою, дослідження Платона лишаються цікавими як одна з перших спроб математичного моделювання в природознавстві, а самі правильні многогранники і сьогодні називають ***платоновими тілами***.

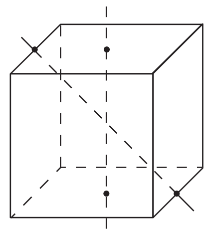


а

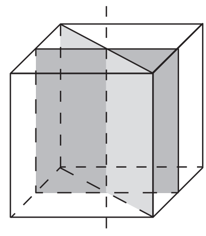


б

Рис. 66. Елементи симетрії правильного тетраедра



а



б

Рис. 67. Елементи симетрії куба

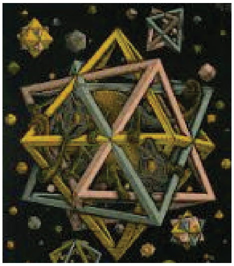


Рис. 68. М. Ешер. Зірки

Досконалі форми правильних многогранників не могли не відбитися у творах митців. На рис. 68 ви бачите гравюру М. Ешера «Зірки», серед елементів якої є правильні многогранники.

6.2. Напівправильні многогранники. Інші види многогранників

Достатньо жорсткі вимоги означення правильних многогранників суттєво обмежують їх кількість. Тому поряд із правильними многогранниками увагу дослідників привертають також ті, які задовольняють умови означення правильного многогранника лише частково. Такими є, зокрема, ***напівправильні многогранники*** — опуклі многогранники, гранями яких є правильні многокутники декількох видів, а в кожній вершині сходиться однакова кількість ребер.

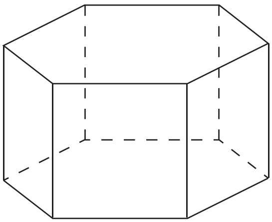


Рис. 69. Правильна призма з рівними ребрами

Серед відомих вам видів многогранників до напівправильних належать правильні n-кутні призми, в яких бічні ребра дорівнюють ребрам основи (за винятком куба, який є правильним многогранником). На рис. 69 зображено правильну шестикутну призму, всі бічні грані якої — квадрати; така призма є напівправильним многогранником.

До напівправильних многогранників належать і так звані антипризми, основами яких є рівні правильні n-кутники, а бічними гранями — рівносторонні трикутники (рис. 70).

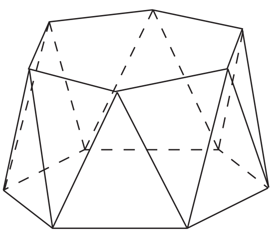
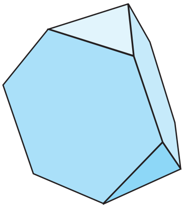


Рис. 70. Антипризма

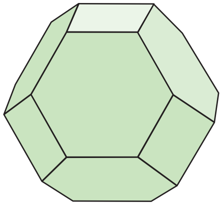
Окрім цих двох нескінченних серій — призм і антипризм, існує ще 14 видів напівправильних многогранників. Їх називають ***тілами Архімеда***. Тринадцять із них відкрив і описав Архімед, а чотирнадцятий був відкритий лише в XX столітті.

Охарактеризуємо тіла Архімеда, зображені на рис. 71. Найпростіші з них можна отримати шляхом «зрізання» кутів правильних многогранників площинами. Наприклад, зрізавши



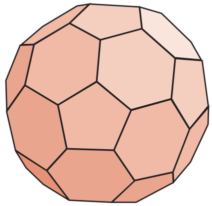
Зрізаний тетраедр

а



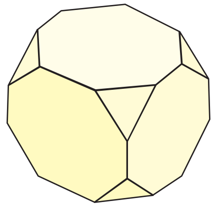
Зрізаний октаедр

б



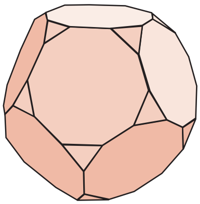
Зрізаний ікосаедр

в



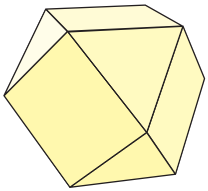
Зрізаний куб

г



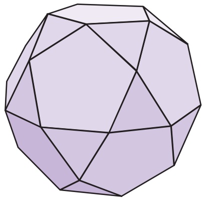
Зрізаний додекаедр

ґ



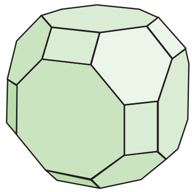
Кубооктаедр

д



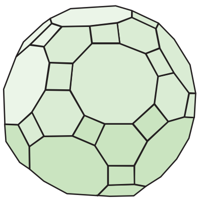
Ікосододекаедр

е



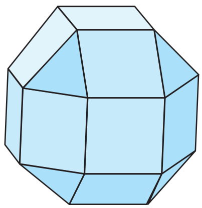
Зрізаний кубооктаедр

є



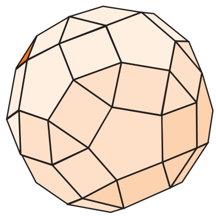
Зрізаний ікосододекаедр

ж



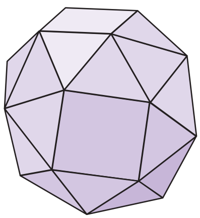
Ромбокубооктаедр

з



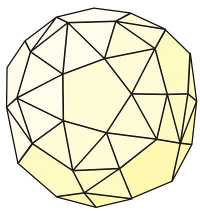
Ромбоікосододекаедр

и



Плосконосий куб

і



Плосконосий додекаедр

ї

Рис. 71. Тіла Архімеда

кути правильного тетраедра так, щоб кожна січна площина відтинала третину його ребер, що виходять з однієї вершини, дістанемо ***зрізаний тетраедр*** (рис. 71, *а*). Аналогічно, зрізавши кути правильних октаедра та ікосаедра, отримаємо ***зрізаний октаедр*** (рис. 71, *б*) та ***зрізаний ікосаедр*** (рис. 71, *в*) — останній многокутник нагадає багатьом із вас футбольний м'яч. Так само з куба одержують ***зрізаний куб*** (рис. 71, *г*), а з правильного додекаедра — ***зрізаний додекаедр*** (рис. 71, *ґ*).

Якщо в кубі провести січні площини через середини ребер, що виходять з однієї вершини, то в результаті відрізання цими площинами частин куба дістанемо ***кубооктаедр*** (рис. 71, *д*). Його назва пояснюється тим, що він має шість граней-квадратів (як куб) і вісім граней — правильних трикутників (як правильний октаедр). Якщо аналогічним способом відсікти кути правильного додекаедра, отримаємо ***ікосододекаедр*** (рис. 71, *е*).

До останніх двох многогранників можна знову застосувати операцію зрізання кутів, у результаті чого утворяться ще два напівправильні многогранники — ***зрізаний кубооктаедр*** (рис. 71, *є*) і ***зрізаний ікосододекаедр*** (рис. 71, *ж*).

Інші чотири архімедових тіла — це ***ромбокубооктаедр*** (рис. 71, *з*), ***ромбоікосододекаедр*** (рис. 71, *и*), ***плосконосий куб*** (рис. 71, *і*) та ***плосконосий додекаедр*** (рис. 71, *ї*).

І, нарешті, єдиним напівправильним многогранником, відкритим не Архімедом, є ***псевдоромбокубооктаедр*** (рис. 72). Його знайшов у 1950 р. німецький математик Й. Міллер, а трохи пізніше, незалежно від нього та один від одного,— радянські вчені В. Ашкінузе та Л. Єсаулова.

Форму напівправильних многогранників ювеліри часто надають коштовним каменям під час огранування (рис. 73).

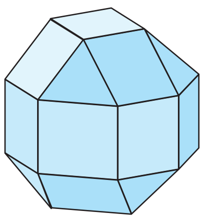


Рис. 72. Псевдоромбокубооктаедр

Рис. 73. Коштовні камені у формі многогранників

Серед інших видів многогранників надзвичайну естетичну та декоративну цінність мають ***зірчасті многогранники*** — неопуклі многогранники, гранями яких є правильні многокутники. Серед них виділяються правильні зірчасті многогранники — так звані тіла Кеплера — Пуансо. Таких многогранників усього чотири (рис. 74). Їх можна отримати продовженням ребер або граней правильних додекаедра й ікосаедра.

Численні форми зірчастих многогранників створені самою природою: наприклад, зірчасті форми мають сніжинки (рис. 75). Дослідженням їхніх форм учені займалися з прадавніх часів — нині відомо декілька тисяч видів сніжинок.

Велике значення в хімії та кристалографії мають інші природні многогранники — ***паралелоедри***. Це опуклі многогранники, якими можна заповнити простір так, щоб вони не входили один в одний і не лишали між собою пустот. П'ять типів паралелоедрів відкрив у 1881 р. один із засновників кристалографії, російський учений Є. С. Федоров, на честь якого ці многогранники було названо ***тілами Федорова*** (рис. 76). А найзнаменитіша теорема теорії паралелоедрів носить ім'я визначного українського математика Г. Ф. Вороного. Узагалі кристалографія як наука багато в чому завдячує геометрії, адже фізичні властивості кристалів залежать від структури їхніх кристалічних ґраток, а ті, у свою чергу, складаються з многогранників (рис. 77).

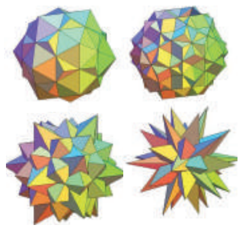


Рис. 74. Правильні зірчасті многогранники

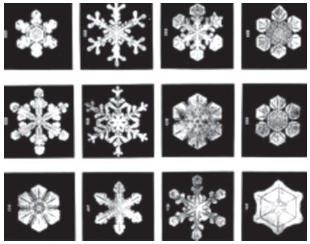


Рис. 75. Сніжинки — природні зірчасті многогранники

Георгій Феодосійович Вороний (1868–1908)

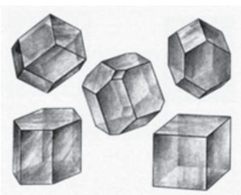


Рис. 76. Тіла Федорова

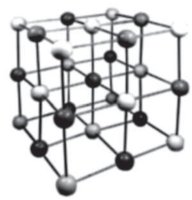


Рис. 77. Кристалічна ґратка графіту

Запитання і задачі

Обговорюємо теорію

240.° Чи завжди є правильним многогранником:
а) правильна піраміда; б) правильна призма?
Чи існує правильна піраміда (призма), яка є правильним многогранником?

241.° Поясніть відмінності між поняттями «тетраедр», «правильна трикутна піраміда» і «правильний тетраедр».

242. Перекладіть англійською (або іншою іноземною мовою) терміни «правильні многогранники», «куб», «правильний тетраедр», «правильний октаедр», «правильний ікосаедр», «правильний додекаедр».

243. Два правильні тетраедри мають спільну основу (рис. 78). Чи є складений із них многогранник правильним? Відповідь обґрунтуйте.

244. Чи може переріз правильного октаедра бути дев'ятикутником? Відповідь обґрунтуйте.

245. В одній із вершин правильного многогранника сходяться чотири ребра. Який це многогранник? Чи має цей многогранник вершину, в якій сходяться три ребра?

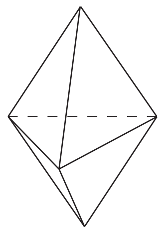


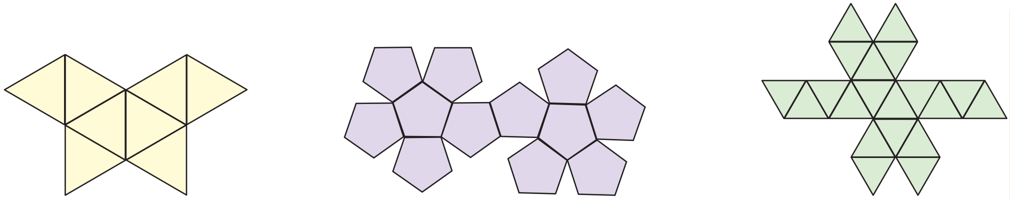
Рис. 78

Моделюємо

246.° На моделі куба покажіть, як проходять площини його симетрії. Розрізавши по двох площинах симетрії модель куба, зроблену з пластиліну, з'ясуйте, які многогранники при цьому утворюються.

247.° На рис. 79 подано розгортки правильного октаедра (див. рис. 63), правильного додекаедра (див. рис. 64) та правильного ікосаедра (див. рис. 65). Перерисуйте їх на цупкий папір у збільшеному масштабі, виріжте розгортки і склейте з них моделі цих многогранників.

248. Знайдіть в мережі Інтернет прикладні програми, за допомогою яких можна створити 3D-моделі правильних, напівправильних та інших многогранників та їх розгорток. Порівняйте ці програми. Надішліть посилання та програму, яка вам найбільше сподобалася, своїм однокласницям та однокласникам.



а б в

Рис. 79. Розгортки правильних многогранників

Розв’язуємо задачі

Рівень А

249.° Розгляньте відомі вам правильні многогранники і заповніть таблицю:

Вид правильного многогранника	Вид грані	Сума плоских кутів при вершині	Кількість вершин В	Кількість граней Г	Кількість ребер Р	В+Г−Р
Правильний тетраедр						
Куб						
Правильний октаедр						
Правильний додекаедр						
Правильний ікосаедр						

Для кожного правильного многогранника обчисліть значення виразу В+Г−Р, де В — кількість вершин, Г — кількість граней, Р — кількість ребер. Які результати ви отримали?

250.° За даним ребром a знайдіть площу повної поверхні:
а) правильного тетраедра; в) правильного октаедра;
б) куба; г) правильного ікосаедра.

251.° Площа повної поверхні правильного многогранника дорівнює $180\sqrt{3}$ см^2. Знайдіть площу його грані, якщо даний многогранник є:
а) правильним тетраедром; в) правильним додекаедром;
б) кубом; г) правильним ікосаедром.

252. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Доведіть, що піраміда D_1ACB_1 — правильний тетраедр.

253. Знайдіть:
а) площу перерізу куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною B_1AC, якщо ребро куба дорівнює 2 см;
б) площу повної поверхні правильного октаедра, в якому висота грані дорівнює m.

254. Знайдіть:
а) площу повної поверхні правильного тетраедра з висотою 6 см;
б) площу поверхні куба з діагоналлю d.

255. Доведіть, що відрізки, які сполучають центри граней правильного тетраедра, рівні.

256. Доведіть, що правильний октаедр має шість пар паралельних ребер.

Рівень Б

257. Знайдіть двогранні кути:
а) правильного тетраедра; б) правильного октаедра.

258. Доведіть, що переріз правильного октаедра, проведений через чотири його вершини, — квадрат.

259. Ребро правильного октаедра дорівнює 4 см. Знайдіть площу перерізу октаедра площиною його симетрії. Скільки розв'язків має задача?

260. Знайдіть площу перерізу правильного тетраедра з ребром a площиною його симетрії.

261. Площі поверхонь правильного тетраедра і правильного октаедра рівні. Доведіть, що ребро тетраедра дорівнює діагоналі октаедра.

262. Точка M — середина висоти PO правильного тетраедра $PABC$. Доведіть, що плоскі кути при вершині M правильної піраміди $MABC$ є прямими.

Рівень В

263. Доведіть, що:
а) центри граней куба є вершинами правильного октаедра;
б) центри граней правильного октаедра є вершинами куба.

264. Доведіть, що середини ребер правильного тетраедра є вершинами правильного октаедра.

265. Доведіть, що центри граней правильного тетраедра є вершинами іншого правильного тетраедра. Знайдіть відношення площ поверхонь цих тетраедрів.

266. Побудуйте переріз правильного тетраедра площиною, яка перпендикулярна до відрізка, що сполучає середини двох мимобіжних ребер, і проходить через середину цього відрізка. Визначте вид перерізу.

267. Доведіть, що протилежні грані правильного октаедра паралельні. Знайдіть відстань між площинами цих граней, якщо ребро правильного октаедра дорівнює a.

Повторення перед вивченням § 7

Теоретичний матеріал

- коло і круг; 7 клас, § 19
- довжина кола і площа круга. 9 клас, § 19

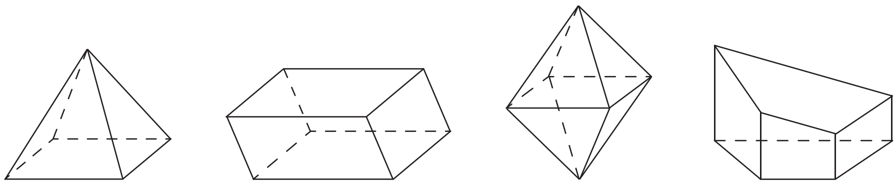
Задачі

268. Знайдіть площу круга, в якому хорда завдовжки $12\sqrt{3}$ см стягує дугу $120°$.

269. З точки кола проведено дві хорди, кут між якими дорівнює $30°$. Знайдіть відношення довжин цих хорд, якщо одна з них проходить через центр кола.

Тестове завдання для самоперевірки № 1

1. Серед заданих фігур виберіть чотирикутну призму.



А Б В Г

2. Відрізок PO — висота правильної чотирикутної піраміди $PABCD$. Які з даних відрізків перетинаються в точці O?

А PA і PB
Б AB і CD
В AC і BD
Г PA і BD

3. Серед заданих геометричних тіл назвіть те, яке не є правильним многогранником.

А Куб
Б Правильний октаедр
В Правильний ікосаедр
Г Правильна чотирикутна піраміда

4. Відрізок PM — апофема правильної трикутної піраміди $PABC$ з висотою PO (рис. 80). Назвіть лінійний кут двогранного кута при ребрі AB основи піраміди.

А PMO
Б PAO
В PAM
Г POM

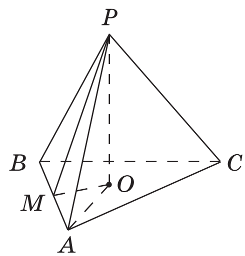


Рис. 80

5. Дано правильну трикутну призму $ABCA_1B_1C_1$. Серед даних тверджень виберіть неправильне.

А BB_1C_1C — прямокутник.
Б Трикутник ABC рівносторонній.
В AA_1B_1C — паралелограм.
Г AA_1BC — просторовий чотирикутник.

6. Серед заданих многокутників назвіть той, який не може бути перерізом п'ятикутної призми.

А Трикутник
Б Чотирикутник
В П'ятикутник
Г Восьмикутник

7. Апофема правильної чотирикутної піраміди дорівнює 4 см, а бічне ребро 5 см. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

А 80 см^2 **Б** 84 см^2 **В** 96 см^2 **Г** 48 см^2

8. Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює 17 см. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда, якщо сторони його основи дорівнюють 8 см і 9 см.

А 289 см^2 **Б** 204 см^2 **В** 408 см^2 **Г** 216 см^2

9. Висота правильної трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ дорівнює l. Знайдіть площу перерізу призми площиною AB_1C, якщо площина перерізу утворює з площиною основи кут α.

А $\dfrac{\sqrt{3}l^2\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$ **Б** $\dfrac{\sqrt{3}l^2\cos\alpha}{3\sin^2\alpha}$ **В** $\dfrac{\sqrt{3}l^2\cos\alpha}{3}$ **Г** $\dfrac{\sqrt{3}l^2}{3\cos\alpha}$

10. Основа трикутної піраміди — прямокутний трикутник, а основа висоти піраміди — середина гіпотенузи цього трикутника. Серед наведених тверджень виберіть неправильне.

А Усі бічні ребра піраміди рівні.

Б Усі бічні ребра піраміди утворюють однакові кути з площиною основи піраміди.

В Усі бічні ребра піраміди утворюють однакові кути з висотою піраміди.

Г Усі висоти бічних граней піраміди рівні.

11. У трикутній піраміді $PABC$ з висотою PO бічна грань PAC перпендикулярна до площини основи, а дві інші грані нахилені до неї під кутом α. Серед наведених тверджень виберіть правильне.

А Точка O — центр кола, вписаного в трикутник ABC.

Б $\angle PAO = \angle PCO = \alpha$.

В $\angle PBO = \alpha$.

Г $BA : BC = OA : OC$.

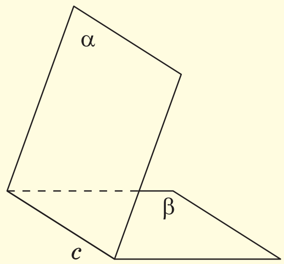
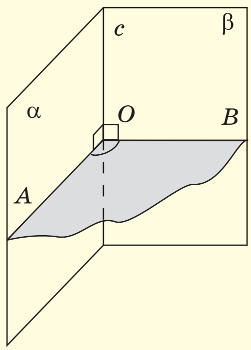
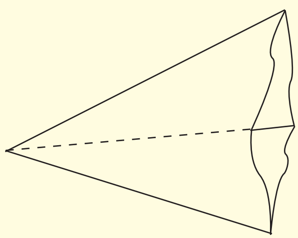
12. Відстань між серединами двох мимобіжних ребер правильного тетраедра дорівнює a. Знайдіть площу повної поверхні цього тетраедра.

А $2\sqrt{3}a^2$ **Б** $3\sqrt{3}a^2$ **В** $\dfrac{\sqrt{3}a^2}{2}$ **Г** $\dfrac{3\sqrt{3}a^2}{2}$

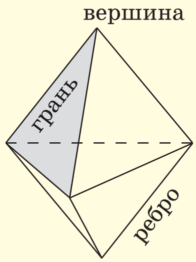
Онлайн-тестування № 1

Теми повідомлень, рефератів, навчальних проектів

Підсумки розділу І

ДВОГРАННІ І МНОГОГРАННІ КУТИ	
	***Двогранним кутом*** називається фігура, яка складається з двох півплощин (***граней двогранного кута***) зі спільною граничною прямою (***ребром двогранного кута***)
	Кут AOB — ***лінійний кут*** двогранного кута Усі лінійні кути двогранного кута рівні ***Градусною мірою двогранного кута*** називається градусна міра його лінійного кута
	***Тригранним кутом*** називається фігура, яка складається з трьох плоских кутів зі спільною вершиною і попарно спільними сторонами, що не лежать в одній площині

МНОГОГРАННИКИ

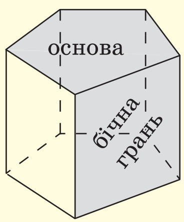


Многогранником називається тіло, поверхня якого складається зі скінченної кількості плоских многокутників

Плоскі многокутники, з яких складається поверхня многогранника, називаються ***гранями многогранника***. Сторони і вершини цих многокутників називаються відповідно ***ребрами*** і ***вершинами многогранника***

Опуклим многогранником називається многогранник, усі точки якого лежать по один бік від площини кожної його грані або в цій самій площині

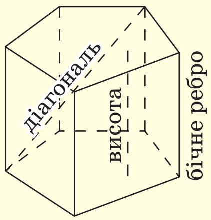
ПРИЗМИ



Призмою називається многогранник, який складається з двох плоских многокутників, що лежать у різних площинах і суміщаються паралельним перенесенням, та всіх відрізків, які сполучають відповідні точки цих многокутників

Многокутники називають ***основами призми***. Усі грані призми, які не є основами, називають ***бічними гранями призми***

- Основи призми паралельні й рівні
- Бічні грані призми є паралелограмами



Бічними ребрами призми називаються відрізки, що сполучають відповідні вершини основ

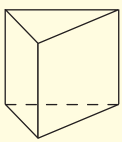
• Бічні ребра призми паралельні й рівні

Висотою призми називається перпендикуляр, проведений із будь-якої точки однієї основи до площини іншої основи

Діагоналлю призми називається відрізок, який сполучає дві вершини, що не належать одній грані

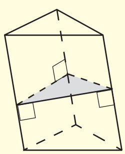
Площею повної поверхні призми називається сума площ усіх її граней, а ***площею бічної поверхні*** — сума площ її бічних граней

ВИДИ ПРИЗМ



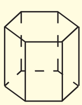
Прямою призмою називається призма, бічні ребра якої перпендикулярні до площин основ

Площа бічної поверхні прямої призми дорівнює добутку периметра її основи на висоту: $S_{\text{бічн}} = P_{\text{осн}} \cdot H$

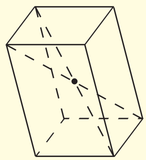


Похилою призмою називається призма, яка не є прямою

Площа бічної поверхні похилої призми дорівнює добутку периметра перпендикулярного перерізу на бічне ребро: $S_{\text{бічн}} = P_{\perp} \cdot l$



Правильною призмою називається пряма призма, основами якої є правильні многокутники

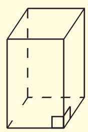


Паралелепіпедом називається призма, основа якої — паралелограм

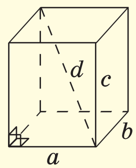
• Протилежні грані паралелепіпеда паралельні й рівні

• Діагоналі паралелепіпеда перетинаються в одній точці й точкою перетину діляться навпіл

• Точка перетину діагоналей паралелепіпеда є центром його симетрії



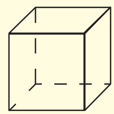
Прямим паралелепіпедом називається пряма призма, основами якої є паралелограм



Прямокутним паралелепіпедом називається прямий паралелепіпед, основою якого є прямокутник

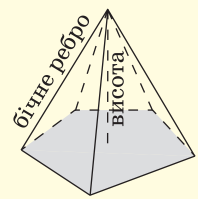
Просторова теорема Піфагора

Квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів трьох його вимірів: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$



Кубом називається прямокутний паралелепіпед, у якому всі ребра рівні

ПІРАМІДИ



Пірамідою називається многогранник, що складається з плоского многокутника (***основи піраміди***), точки, яка не лежить у площині основи (***вершини піраміди***), і всіх відрізків, що сполучають вершину з точками основи

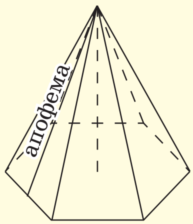
Тетраедром називають трикутну піраміду

Висотою піраміди називається перпендикуляр, проведений із вершини піраміди до площини її основи

Площею бічної поверхні піраміди називається сума площ її бічних граней, а ***площею повної поверхні*** — сума площ основи й бічної поверхні:

$$S_{повн} = S_{бічн} + S_{осн}$$

ВИДИ ПІРАМІД



Правильною пірамідою називається піраміда, основою якої є правильний многокутник, а основа висоти піраміди є центром цього многокутника

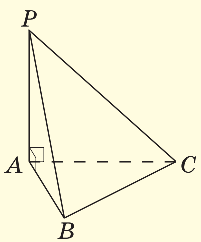
Апофемою правильної піраміди називається висота бічної грані, проведена з вершини піраміди

- Усі бічні ребра правильної піраміди рівні
- Усі бічні ребра правильної піраміди однаково нахилені до площини основи
- Усі бічні ребра правильної піраміди утворюють однакові кути з висотою піраміди
- Усі бічні грані правильної піраміди — рівні рівнобедрені трикутники
- Усі двогранні кути при основі правильної піраміди рівні

Площа бічної поверхні правильної піраміди дорівнює півдобутку периметра її основи на апофему:

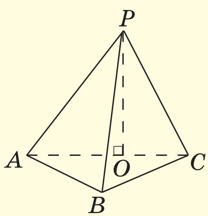
$$S_{\text{бічн}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} \cdot l$$

Дві бічні грані перпендикулярні до основи



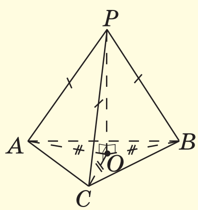
PA — висота піраміди

Одна бічна грань перпендикулярна до основи



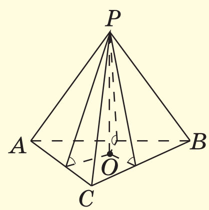
PO — висота піраміди

Бічні ребра рівні



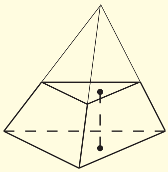
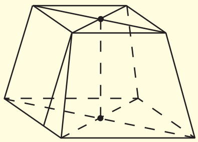
PO — висота піраміди, O — центр кола, описаного навколо основи

Двогранні кути при основі рівні

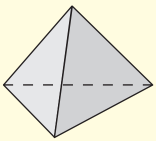
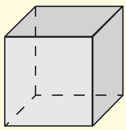
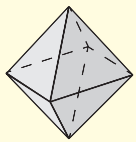


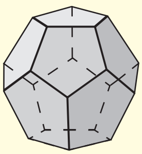
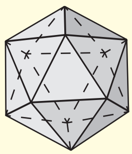
PO — висота піраміди, O — центр кола, вписаного в основу

ЗРІЗАНА ПІРАМІДА

	Площина, яка паралельна площині основи піраміди й перетинає її бічні ребра, відтинає меншу піраміду та многогранник, який називають ***зрізаною пірамідою*** ***Основами зрізаної піраміди*** є основа даної піраміди та подібний їй многокутник, отриманий в перерізі ***Висотою зрізаної піраміди*** називається перпендикуляр, проведений із будь-якої точки однієї основи до площини іншої основи
	Якщо січна площина правильної піраміди паралельна основі, то в результаті перетину утворюється ***правильна зрізана піраміда*** ***Апофемою правильної зрізаної піраміди*** називається висота бічної грані • Основи — правильні многокутники • Відрізок, що сполучає центри основ,— висота • Бічні грані — рівні рівнобічні трапеції ***Площа бічної поверхні правильної зрізаної піраміди*** дорівнює добутку півсуми периметрів її основ на апофему: $S_{\text{бічн}} = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot l$

ПРАВИЛЬНІ МНОГОГРАНИКИ

Правильний тетраедр	Куб (правильний гексаедр)	Правильний октаедр
		

Правильний додекаедр	Правильний ікосаедр
	

Контрольні запитання до розділу I

1. Дайте означення двогранного кута. Зобразіть двогранний кут і обґрунтуйте його лінійний кут.
2. Нарисуйте тригранний кут, опишіть його елементи та зв’язки між ними.
3. Дайте означення многогранника.
4. Дайте означення призми. Зобразіть призму й опишіть її елементи.
5. Дайте означення прямої призми. Як обчислити площу її бічної поверхні? Доведіть відповідне твердження.
6. Дайте означення правильної призми. Опишіть її властивості.
7. Сформулюйте теорему про площу бічної поверхні похилої призми.
8. Дайте означення паралелепіпеда. Який паралелепіпед називається прямим; прямокутним? Як обчислити довжину діагоналі прямокутного паралелепіпеда за його вимірами? Доведіть відповідну формулу.
9. Дайте означення піраміди. Зобразіть піраміду й опишіть її елементи.
10. Яка піраміда називається правильною? Як обчислити площу бічної поверхні правильної піраміди? Доведіть відповідне твердження.
11. Як властивості бічних ребер та граней піраміди визначають розташування її висоти?
13. Яку форму має переріз піраміди, паралельний площині основи? Дайте означення зрізаної піраміди. Зобразіть зрізану піраміду й опишіть її елементи.
14. Сформулюйте та доведіть теорему про площу бічної поверхні правильної зрізаної піраміди.

Додаткові задачі до розділу I

270. Доведіть, що діагональний переріз правильної п’ятикутної призми паралельний одній із бічних граней.

271. У правильній чотирикутній призмі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ діагоналі B_1D і BD_1 перпендикулярні. Знайдіть кут між діагоналями A_1C і B_1D.

272. Висота правильної шестикутної призми дорівнює 4 см, а діагоналі двох сусідніх бічних граней, проведені з однієї вершини, взаємно перпендикулярні. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

273. Основа прямої призми — трапеція з основами 3 см і 10 см, а три бічні грані призми — квадрати. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

274. Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють 17 см і 31 см, а його діагоналі утворюють із площиною основи кути $45°$ і $60°$. Знайдіть висоту паралелепіпеда.

275. Площа основи правильної трикутної призми дорівнює S, а площа перерізу, проведеного через сторону однієї основи й протилежну вершину другої основи, дорівнює Q. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

276. Площа бічної поверхні правильної трикутної піраміди вдвічі більша за площу основи. Доведіть, що сторона основи піраміди вдвічі більша за її висоту.

277. Яку найбільшу площу повної поверхні може мати трикутна піраміда, п’ять ребер якої дорівнюють a?

278. Основа піраміди — квадрат зі стороною a. Одна бічна грань піраміди перпендикулярна до площини основи, а дві сусідні з нею бічні грані утворюють з основою кути α і β. Знайдіть висоту піраміди.

279. Основа піраміди — ромб зі стороною a і кутом $60°$. Дві бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи, а дві інші нахилені до неї під кутом $60°$. Знайдіть висоту піраміди.

280. Основа піраміди — трикутник зі стороною c та прилеглими до неї кутами α і β. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, якщо всі двогранні кути при основі дорівнюють $60°$.

281. Основа піраміди — прямокутник із кутом між діагоналями γ. Усі бічні ребра піраміди дорівнюють l і нахилені до площини основи під кутом α. Знайдіть площу основи піраміди.

282. Відрізок завдовжки 27 см, що сполучає центри основ правильної зрізаної чотирикутної піраміди, ділить її діагональ на частини завдовжки 20 см і 25 см. Знайдіть площі основ піраміди.

283. Ребро правильного октаедра дорівнює a. Знайдіть площу поверхні куба, вершинами якого є центри граней даного октаедра.

284 (опорна). ***Якщо основа висоти піраміди є центром кола, вписаного в її основу, то в даній піраміді:***

1) ***усі двогранні кути при основі рівні;***
2) ***усі висоти бічних граней, проведені з вершини піраміди, рівні;***
3) ***усі висоти бічних граней, проведені з вершини піраміди, утворюють однакові кути з висотою піраміди;***
4) ***висота піраміди утворює однакові кути з площинами всіх бічних граней.***

Доведіть.

285. Розбийтеся на дві міні-команди і знайдіть у мережі Інтернет інформацію про піраміди: одна команда — про єгипетські піраміди, друга — про піраміди майя. Порівняйте їхні розміри, зовнішній вигляд, вік, призначення. Висловіть припущення, чому в зовсім різних культурах виникли величезні споруди саме у формі пірамід (рис. 81, 82).

Рис. 81. Піраміди, Гіза, Єгипет

Рис. 82. Піраміди майя (храм Кукулькан), Юкатан, Мексика

286. Які многогранники найчастіше використовуються як макети будівель або їх частин? Під час прогулянки з друзями і подругами населеним пунктом, де ви живете, знайдіть приклади використання призм, зокрема паралелепіпедів, пірамід тощо в архітектурі. Сфотографуйте об’єкти, які ви вважаєте найбільш вдалими зразками. Використайте фотографії для створення презентації за темою «Многогранники в архітектурі».

287. Однією з найвідоміших у світі дизайнерів та архітекторів є Заха Хадід (рис. 83). Вона створила чимало надзвичайних та захоплюючих уяву об'єктів у стилі постмодернізму (рис. 84). У деяких вона використовувала многогранники, в інших — свідомо уникала їх. Створіть із друзями та подругами презентацію про життя і творчість Захи Хадід та зробіть невеличке повідомлення на уроці. Висловіть припущення, які геометричні тіла, зокрема многогранники, Хадід використовувала у своїх проектах.

Рис. 83. Заха Хадід

Рис. 84. Opus Office Tower, Абу-Дабі, ОАЕ

Задачі підвищеної складності

288. Доведіть, що існує тригранний кут, усі плоскі кути якого дорівнюють $60°$.

289 (опорна). ***Дано тригранний кут із плоскими кутами*** α, β, γ ***та протилежними до них двогранними кутами A, B, C відповідно. Тоді існує полярний тригранний кут із плоскими кутами*** $180° - A$, $180° - B$, $180° - C$ ***та двогранними кутами*** $180° - \alpha$, $180° - \beta$, $180° - \gamma$. Доведіть.

290 (опорна). ***Дано тригранний кут із плоскими кутами*** α, β, γ ***та протилежними до них двогранними кутами A, B, C відповідно. Тоді:***

а) $\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos C$ (***перша теорема косинусів для тригранного кута***);

б) $\cos C = -\cos A\cos B + \sin A\sin B\cos\gamma$ (***друга теорема косинусів для тригранного кута***);

в) $\dfrac{\sin\alpha}{\sin A} = \dfrac{\sin\beta}{\sin B} = \dfrac{\sin\gamma}{\sin C}$ (***теорема синусів для тригранного кута***).

Доведіть.

291. Кожне ребро правильної шестикутної призми дорівнює a. Знайдіть площу перерізу, проведеного через середини двох паралельних сторін основи під кутом $45°$ до площини основи. Чи зміниться відповідь, якщо бічне ребро призми дорівнює b ($b>a$)?

292. Основа піраміди — трикутник зі сторонами 9 см, 12 см і 15 см. Вершина піраміди віддалена від кожної сторони основи на 5 см. Знайдіть площу перерізу, який проходить через висоту і найбільше бічне ребро піраміди.

293. Площа бічної грані правильної чотирикутної піраміди дорівнює S. Знайдіть площу перерізу, проведеного через середину висоти піраміди паралельно її бічній грані.

294. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ та точки P, Q, R на ребрах AA_1, A_1D_1, A_1B_1 відповідно. Точки M, N, K лежать усередині многокутників PQR, $B_1C_1D_1QR$, CC_1D_1D відповідно. Побудуйте переріз многогранника $ABCDPQD_1C_1B_1R$ (куба зі «спилом») площиною MNK.

295. Тетраедр називається *ортоцентричним*, якщо всі його чотири висоти (або їх продовження) перетинаються в одній точці. Доведіть властивості, пов'язані з ортоцентричним тетраедром.

а) Дано тетраедр $PABC$, в якому $AP \perp BC$. Тоді висоти, проведені з вершин B і C (а також висоти, проведені з вершин A і P), перетинаються в одній точці, причому ця точка лежить на спільному перпендикулярі до AP і BC.

б) Дано тетраедр $PABC$, в якому висоти, проведені з вершин B і C, перетинаються в одній точці. Тоді $AP \perp BC$.

в) Тетраедр є ортоцентричним тоді й тільки тоді, коли дві пари його протилежних ребер перпендикулярні (у цьому випадку третя пара протилежних ребер також є перпендикулярною).

г) Тетраедр є ортоцентричним тоді й тільки тоді, коли суми квадратів його протилежних ребер є рівними.

296. Тетраедр називається *рівногранним*, якщо всі його грані є рівними трикутниками. Доведіть, що тетраедр є рівногранним тоді й тільки тоді, коли виконується одна з таких умов:

а) суми плоских кутів при будь-яких трьох вершинах тетраедра дорівнюють $180°$;

б) суми плоских кутів при будь-яких двох вершинах тетраедра дорівнюють $180°$ і, крім того, рівні які-небудь два протилежних ребра;

в) сума плоских кутів при будь-якій вершині дорівнює $180°$ і, крім того, в тетраедрі є дві пари рівних протилежних ребер.

297. Тетраедр називається *прямокутним*, якщо три плоскі кути при одній вершині є прямими. Доведіть такі твердження:

а) кожний прямокутний тетраедр є ортоцентричним;

б) довжини відрізків, які з'єднують середини протилежних ребер прямокутного тетраедра, є рівними;

в) сума квадратів трьох площ граней прямокутного тетраедра дорівнює квадрату площі четвертої грані.

298. Дано правильний тетраедр $PABC$. Точки K, M і N — середини ребер CP, AP і AB відповідно, а точка O — центр трикутника ABC. Знайдіть кут між прямими MO і KN.

299. Кожне ребро призми $ABCA_1B_1C_1$ дорівнює 2. Точки M і N — середини ребер AB і A_1C_1 відповідно. Знайдіть відстань від точки M до прямої CN, якщо відомо, що $\angle A_1AC = 60°$, а прямі A_1A і AB перпендикулярні.

Київський національний університет

Київський національний університет (КНУ) був заснований у 1833 р. під назвою Університет Святого Володимира. У XIX — на початку XX ст. тут викладали відомі вчені: історики М. Костомаров, М. Драгоманов, математики Б. Делоне, Д. Граве, Б. Букреєв та інші.

У 1939 р. університет було названо на честь всесвітньо відомого українського поета Тараса Шевченка, який працював тут у 1845–1847 рр. в Археографічній комісії.

У 1848 р. при університеті було засновано клініку, де працював видатний хірург М. І. Пирогов.

Нині в університетському ботанічному саду розміщено найбільший у світі кліматрон для моделювання географічних зон, а бібліотечні фонди КНУ ім. Т. Шевченка складають 3,52 млн видань. Це найбільша за розмірами своїх фондів наукова університетська бібліотека в Україні. Але найбільшу гордість університету складають люди — видатні вчені минулого та їхні гідні нащадки.


Червоний корпус КНУ ім. Т. Шевченка

У різні роки в університеті працювали славетні математики — члени Академії наук України. Серед них — один із засновників української наукової математичної школи М. Кравчук, видатні математики та механіки М. Крилов та М. Боголюбов, на честь яких Академія наук України запровадила премії для талановитих учених. Українські академіки В. Глушков та Б. Гнєденко були піонерами в розробці математичних основ кібернетики та програмування, створенні надпотужних комп'ютерів. Багато відкриттів у світі математики зроблено колишніми студентами Київського університету, а згодом — всесвітньо відомими вченими, академіками Ю. Митропольським та А. Самойленком. Величезний внесок у розвиток теорії ймовірностей зробили академіки А. Скороход, Й. Гіхман, М. Ядренко та їхні послідовники. І зараз механіко-математичний факультет КНУ ім. Шевченка разом з Інститутом математики Національної академії наук України готує спеціалістів найвищого рівня, зокрема, з цього напрямку математики.

Не відстають від своїх відомих попередників і молоді науковці. Так, випускниця КНУ М. В'язовська у 2016 р. отримала престижну математичну премію Салема за розв'язання задачі комбінаторної геометрії про щільне пакування куль у 8- та 24-вимірному просторі. Історія цього питання почалася в Середньовіччі. Наприкінці 1500-х років англійський державний діяч сер В. Рейлі запропонував англійському математику Т. Герріоту розробити найбільш ефективний спосіб укладання гарматних ядер на кораблях британського військового флоту. До розв'язання цієї задачі долучився видатний астроном І. Кеплер. Він припустив, що немає щільнішої упаковки однакових сфер, ніж та, що вже застосовується, зокрема, при укладанні гарматних ядер і фруктів. При цьому перший шар викладається кулями так, що кожна дотикається до шести інших, другий — у поглиблення між кулями першого шару і т. д. При такому варіанті укладання максимальна щільність буде близькою до 74 %. Гіпотеза Кеплера, недоведена протягом кількох століть, стала однією з 23 нерозв'язаних математичних задач згідно зі списком, складеним у 1900 р. видатним німецьким математиком Д. Гільбертом. Остаточно ця задача не розв'язана і досі. Але навіть за значне просування у її розв'язанні М. В'язовська була нагороджена у 2017 р. американським Математичним інститутом Клея та індійським університетом SASTRA. Можливо, хтось із вас у майбутньому стане причетним до розгадки цієї чи іншої математичної таємниці.

Механіко-математичний факультет КНУ ім. Тараса Шевченка

Марина В'язовська

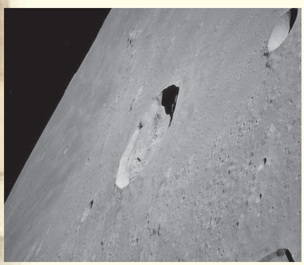
Історична довідка

Многогранники як найбільш поширені геометричні тіла цікавили вчених із глибокої давнини. У різні часи чимало математиків пропонували власні означення призми й піраміди. Відтак було винайдено декілька підходів до означення многогранників — зокрема щодо того, чи вважати многогранник поверхнею або тілом, обмеженим поверхнею. Кожний із цих підходів є коректним із наукової точки зору і має своїх прихильників.

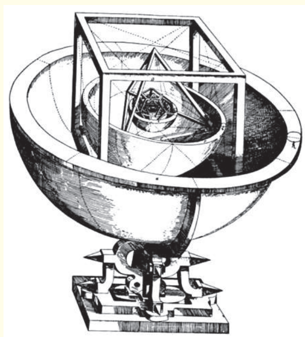
Учення про правильні многогранники викладене в останній книзі «Начал» Евкліда, однак деякі історики приписували першість у дослідженні правильних многогранників Піфагору. Узагалі, майже всі найвідоміші давньогрецькі геометри так чи інакше торкалися у своїх роботах властивостей правильних многогранників. Інтерес до цієї теми поновився в Середні віки в середовищі митців та архітекторів. Визначний німецький астроном і математик Іоганн Кеплер (1571–1630) на підставі теорії правильних многогранників побудував модель Сонячної системи (так званий «кубок Кеплера»). Щоправда, в подальших дослідженнях астрономів гіпотези Кеплера не знайшли підтвердження. Але ідея використання многогранників для моделювання природних явищ дала поштовх багатьом дослідженням у різних галузях науки.

Іоганн Кеплер

Пам'ятник Кеплеру у Вайль-дер-Штадті



Кратер Кеплера на Місяці



Кубок Кеплера (модель Сонячної системи)